

LYCEE SECONDAIRE
9 AVRIL 1938
Sidi Bouzid

Series:
3^{ème} année T & SC

9

Equations & inéquations trigonométriques

EXERCICE N°1

a) Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

2) $-\sqrt{2} \sin x + 1 = 0$

3) $\cos x \cdot \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

4) $\operatorname{tg}(-x) = -1$

5) $\cos x = \sin 3x$

6) $-\cos 2x + \sin 2x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

7) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x = 1$

8) $2\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - 1 = 0$

9) $\cos 3x = 4\cos^2 x$

10) $\sin(x - \frac{\pi}{2}) + \cos(2x - \frac{\pi}{2}) = 0$

11) $\cos x + \sqrt{3} \sin x + \sqrt{2} = 0$

12) $\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 4x = 1$

13) $\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{6}) + \operatorname{tg}(-x + \frac{\pi}{3}) = 0$

14) $\sin^2(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) - \cos^2(x + \frac{\pi}{4}) = 0$

15) $\operatorname{tg}^2(x - \frac{\pi}{6}) - \operatorname{tg}^2(x + \frac{\pi}{3}) = 0$

16) $\sin^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

17) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 4x = 2\operatorname{tg} 3x$

18) $\sin x + \sin 2x + \sin 5x + \sin 6x = 0$

19) $\cot \operatorname{tg}^3 x = 2\cos 3x$

20) $1 + \cos x + \sin x + \sin 2x = 0$

21) $2\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$

22) $3\sin x = 2\cos^2 x$

23) $\frac{\sin 3x}{\sin 2x} - \frac{\cos 3x}{\cos 2x} = 2$

24) $\sin(2x + \pi/6) + \sin(\pi/3 - x) = 0$

25) $\sin 2x + \cos 3x = 0$

26) $\sin^2 x - 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 1$

27) $\sqrt{3} \cos x - \sin x = m$

b) Résoudre dans $[0; 2\pi]$ les équations suivantes :

$$1) \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = 3$$

$$2) \frac{3 + 2 \cos x}{1 + \cos x} = 1$$

$$3) \frac{2 + \sin x}{2 - \sin x} = -1$$

$$4) \cos 2x = \cos^2 x$$

$$5) 2\cos^2 x = \cot g x$$

EXERCICE N°2

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 4x = \sin x$

2- Soit un réel x vérifiant : $\sin x = \frac{-\sqrt{5} - 1}{4}$ et $-\pi/2 < x < 0$

a) Calculer $\cos 2x$ et $\cos 4x$.

b) En déduire alors x

3- Calculer $\tan(3\pi/10)$

EXERCICE N°3

Soit un réel x vérifiant : $\tan x = 1 - \sqrt{2}$ et $-\pi/2 < x < 0$

1- Déterminer $\tan 2x$ et en déduire x

2- Déterminer les réels t vérifiant : $\cot g(t - \pi/3) = 1 - \sqrt{2}$

3- Déterminer les réels y vérifiant : $\frac{\sqrt{3} - \tan y}{1 + \sqrt{3} \tan y} = -1 + \sqrt{2}$

4- Déterminer les réels z de $[-\pi; \pi]$ vérifiant : $\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}) - \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{z}{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$

EXERCICE N°4

Résoudre chacune des inéquations suivantes dans l'intervalle I indiqué :

$$1) 2\cos x - 1 > 0 \quad I = [-\pi; \pi] \quad 2) \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad I = [0; \pi]$$

$$3) \sqrt{3} \tan x + 1 > 0 \quad I =]-\pi/2; \pi/2[\quad 4) \cot g x > \sin 2x \quad I =]0; \pi[$$

$$5) 4\sin^2 x - 1/2 < 0 \quad I = [0; 2\pi] \quad 6) \sin 4x + 4\sin^3 x \cdot \cos x \geq 0 \quad I = \mathbb{R}$$

$$7) \sin^3 x < \cos^3 x \quad I=[0;2\pi] \quad 8) \cos 2x + 2\cos^2 x > 2 \quad I=\mathbb{R}$$

$$9) 3\tan^2 x - 4\tan x + 3 < 0 \quad I =]-\pi/2; \pi/2[$$

EXERCICE N°5

Déterminer le signe des expressions suivantes dans $[-\pi; \pi]$.

$$A = 2\cos x + 1$$

$$B = -\sin x - 4$$

$$C = \tan^2 x - 3$$

$$D = \sin^2 x - 1$$

$$E = -\cos x + 1$$

$$F = \cos^2 x + \cos x$$

$$G = \cos^2 x - 3\cos x$$

EXERCICE N°6

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos x + \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$g(x) = \sin 2x + \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right)$$

- 1- comparer $f(\pi/4 - x)$ et $g(x)$
- 2- Démontrer que f et g sont constantes sur $\mathbb{R}$
- 3- Soit (O, i, j) un repère orthonormé direct du plan, (C) le cercle trigonométrique de centre O et A, B et C les points de (C) tels que le triangle ABC soit équilatéral, on

pose $(i, \overrightarrow{OA}) \equiv 2x[2\pi]$. Démontrer que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

- 4- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\tan 2x \cdot \tan x = 1$. Construire les images des solutions sur le cercle trigonométrique

EXERCICE N°7

On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $8x^3 - 6x - 1 = 0$ (E)

- 1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 3x = 1/2$ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique
- 2- a) Exprimer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$
b) Vérifier que $x_1 = \cos \pi/9$, $x_2 = \cos 7\pi/9$, $x_3 = \cos 13\pi/9$ sont les solutions de l'équation (E)

- 3- Ecrire $8x^3-6x-1=0$ sous la forme d'un produit faisant intervenir x_1, x_2, x_3 puis déduire les valeurs de :

$$A = \cos \pi/9 + \cos 7\pi/9 + \cos 13\pi/9$$

$$B = \cos \pi/9 \cdot \cos 7\pi/9 + \cos 7\pi/9 \cdot \cos 13\pi/9 + \cos \pi/9 \cdot \cos 13\pi/9$$

$$C = \cos \pi/9 \cdot \cos 7\pi/9 \cdot \cos 13\pi/9$$