

EXERCICE N°1

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \frac{2x-1}{1-x}$

On désigne par ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1- dresser le tableau de variation de f
- 2- Soit D_p la droite dont une équation cartésienne: $y=x+p$ où p est un paramètre réel
 - a) Déterminer suivant les valeurs de p le nombre des points d'intersection de D_p et ζ_f
 - b) Lorsque D_p coupe ζ_f en deux points M' et M'' déterminer l'ensemble des points Γ milieu du segment $[M'M'']$ quant p varie dans $\mathbb{R}$
 - c) Pour deux valeurs p' et p'' de p ($p' < p''$), $D_{p'}$ coupe ζ_f en un seul point. On note A et B les deux points correspondants. Montrer que $D_{p'}$ et $D_{p''}$ sont tangentes à ζ_f respectivement en A et B et que $(AB) \perp D_p$ pour tout p réel
 - d) Construire Γ , $D_{p'}$, $D_{p''}$ et ζ_f
- 3- Soit $\Omega(1, -2)$
 - a) Montrer que Ω est un centre de symétrie pour ζ_f
 - b) Donner une équation cartésienne de ζ_f dans le repère $R' = (\Omega, \vec{i}, \vec{j})$
 - c) Relativement au repère R' on donne les points $F(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $F'(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et M_0 le point d'abscisse 2
 - Donner une équation de la tangente (T) à ζ_f au point M_0
 - On pose $\{J\} = (AB) \cap (T)$. déterminer les coordonnées du point J
 - Vérifier que $\frac{JF}{JF'} = \frac{M_0F}{M_0F'}$

EXERCICE N°2

Soit f la fonction définie par: $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 2}{2x + 3}$

On désigne par ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1- Etudier les variations de f
- 2- Préciser les asymptotes de ζ_f
- 3- Montrer que le point I intersection des deux asymptotes est un centre de symétrie pour ζ_f
- 4- Tracer ζ_f
- 5- Soit $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$. Donner une équation de la courbe de f dans le repère $R'(I, \vec{u}, \vec{j})$
- 6- Utiliser le graphique pour discuter les solutions de l'équation
(Ep): $2x^2 - (2+p)x - 3p + 2 = 0$
- 7- Donner une équation de la tangente à ζ_f au point d'abscisse 3
- 8- Soit D_m de coefficient directeur m et passant par le point $B(-\frac{3}{2}, -\frac{20}{9})$

Etudier graphiquement, suivant les valeurs de m , l'intersection de D_m et ζ_f

EXERCICE N°3

Soit f la fonction définie par: $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1}$

On désigne par ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Etudier les variations de f
2. Préciser les asymptotes de ζ_f
3. Montrer que le point I intersection des deux asymptotes est un centre de symétrie pour ζ_f
4. Tracer ζ_f
5. Soit $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$. Donner une équation de la courbe de f dans le repère $R'(I, \vec{u}, \vec{j})$
6. a) Ecrire une équation de la tangente (T) à ζ_f au point K d'abscisse 1 dans R
b) existe-t-il des tangentes à ζ_f qui sont perpendiculaires à (T)
7. Soit $D_m: y = mx + 2$. Discuter suivant les valeurs de m le nombre des points d'intersection de ζ_f et D_m

EXERCICE N°4

Soit f la fonction définie par: $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$

On désigne par ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Etudier les variations de f
2. Préciser les asymptotes de ζ_f
3. Montrer que le point I intersection des deux asymptotes est un centre de symétrie pour ζ_f
4. Tracer ζ_f
5. soit $D_m: y = 2x + m$ avec m un paramètre réel
 - a) Montrer que pour tout réel m D_m coupe ζ_f en deux points M' et M'' distincts
 - b) Déterminer l'ensemble des points milieux des segments $[M'M'']$ quand m varie
6. Soit $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.
 - a) Donner une équation de la courbe de f dans le repère $R'(I, \vec{u}, \vec{j})$
 - b) Donner relativement au repère R' une équation de la tangente D en un point M_0 d'abscisse X_0
 - c) Déterminer les coordonnées des points T et T' intersection de D avec les droites $D(I, \vec{u})$ et $D(I, \vec{j})$
 - d) Montrer que $M_0 = T * T'$. En déduire une constriction de la tangente D en M_0
 - e) Montrer que $\overline{AT} \cdot \overline{AT'}$ est indépendante de M_0

EXERCICE N°5

Soit f_m la fonction définie par: $f_m(x) = 2x - m + \frac{8 - 2m^2}{x - 2m}$ où $m \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- 1- Pour quelle valeurs de m , f_m conserve-t-elle la même variation? Quel est ce sens?
Pour quelle valeurs de m , f_m admet-t-elle un maximum et un minimum?

- 2- Montrer que toutes les courbes ζ_m admettent un centre de symétrie Ω_m dont-on donnera ces coordonnées. Déterminer l'ensemble des points Ω_m lorsque m varie
- 3- Montrer que toutes les courbes ζ_m passe par deux points fixes M et N
- 4- Soit f la fonction définie par: $f(x) = \frac{2x^2 + 8}{x}$
 - a) Etudier les variations de f et construire sa ζ courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
 - b) Utiliser la courbe ζ pour discuter selon k le nombre des solutions de l'équation $(E_k): 2x^2 - kx + 8 = 0$ ($k \in \mathbb{R}$)

EXERCICE N°6

Soit f_m la fonction définie par: $f_m(x) = \frac{(m+1)x^2 - (3m+1)x + 2(m-1)}{x}$ On désigne par

ζ_m sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1- Etudier f_3 et représenter sa courbe ζ_3
- 2- Montrer que toutes les courbes ζ_m passent par deux points fixes A et B (A celui d'ordonnée nul)
- 3- Ecrire les équations cartésiennes des tangentes à ζ_m au point A et B
- 4- Peut-on trouver des valeurs de m pour que ces tangentes soient parallèles puis perpendiculaires
- 5- Pour qu'elle valeurs de m, ζ_m admet un extremum en A

EXERCICE N°7

Soit f_m la fonction définie par: $f_m(x) = \frac{mx^2 - 3x + 5 - m}{x - 1}$ On désigne par ζ_m sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1- Montrer que toutes les courbes ζ_m passent par un point fixe que l'on précisera
 - 2- Etudier suivant les valeurs de m le sens de variation de f_m
- Pour la suite on prend $m=2$, et on note f_2 par f et ζ_2 par ζ
- 3- a) Tracer ζ
 - b) Utiliser la courbe ζ pour discuter selon les valeurs de k le nombre des solutions de l'équation $(E_k): 2x^2 + (k-2)x + 3 - k = 0$
 - 4- soit g la fonction définie par: $g(x) = \frac{2x^2 + 5x + 5}{x + 1}$ et Γ sa courbe selon le même repère
 - a) Montrer que pour tout $x \in D_f$ alors $(x-2) \in D_g$ et $g(x-2) = f(x)$
 - b) En déduire que Γ c'est l'image de ζ par une translation que l'on précisera. Construire alors Γ
 - c) La courbe de restriction de g sur $]-1, +\infty[$ et la courbe ζ se coupe en H la droite D passant par H et parallèle à $D(O, \vec{i})$ recoupe ζ en E et Γ en F Montrer que H est le milieu du segment $[EF]$ sans calculer les coordonnées de ces points

EXERCICE N°8

A- Soit f la fonction définie par: $f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 1}{x^2 + x}$ On désigne par ζ sa courbe

représentative dans un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

1- Déterminer le domaine de définition de f

2- Trouver les réels a, b , et c pour que $f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$

3- Montrer que la droite $D: x = -\frac{1}{2}$ est un centre de symétrie pour ζ

4- Etudier les variations de f

5- Tracer ζ

6- Utiliser la courbe ζ pour tracer la courbe $\Gamma: y = 2 - \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x|+1}$

7- On considère la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par: $U_n = 2 - f(n)$

a) Calculer la somme $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

B- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par:
$$\begin{cases} g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ g(0) = 2 \end{cases}$$

1- Etudier la continuité de g en 0

2- Etudier la dérivabilité de g en 0 puis interpréter graphiquement le résultat

3- Déterminer les réels α, β et γ pour que $g(x) = \alpha x + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x+1}$ pour tout $x \neq -1$

4- Montrer que le point $\Omega(-1, 4)$ est un centre de symétrie pour C_g

5- Etudier les variations de g

6- Tracer C_g dans un repère $R'(O', \vec{u}, \vec{v})$