

Exercice N°1 :

1) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{2x}$. Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

2) Soit un rectangle IABC tel que $IA = 2$ et $IC = 1$.

Pour tout M de la demi-droite d'origine A portée par (IA) et ne contenant pas I , on considère le point N , point d'intersection de (MB) avec (IC) . On s'intéresse à l'aire S du triangle IMN . On pose $AM = x$ et g la fonction qui à x fait correspondre S .

a/ Quel est l'ensemble de définition E de g ? Montrer que $\forall x \in E, g(x) = f(x)$

b/ Où faut-il placer M pour que S soit minimale ? pour que $S = 8$?

3) Soit k la fonction qui, à tout x de E , fait correspondre l'aire du trapèze CBMI.

a/ Calculer $k(x)$ puis étudier la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $g(x) - k(x)$

b/ Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Exercice N°2 :

Soit f_m la fonction définie par $f_m(x) = \frac{x-2m}{mx-2}$ où $m \in \mathbb{R}^*$ et H_m la courbe de f_m dans un R.O.N $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) a/ Montrer que les courbes H_m passent par deux points fixes A et B

b/ Trouver les coefficients directeurs des tangentes à H_m en A et B .

Montrer que leur produit ne dépend pas de m .

2) Étudier selon la paramètre m les variations de f_m

3) a/ Montrer que $S_O(H_m) = H_{-m}$ où S_O est la symétrie de centre O .

b/ Construire sur le même repère H_2 et H_{-2} .

c/ Soit $M_0(x_0; y_0)$ et $E = \{ M_0 \in P / y_0(2x_0 - 2) - (x_0 - 4) > 0 \}$.

Trouver E et le colorier (On utilise un schéma à part)

4) Soit $\Omega\left(\frac{2}{m}; \frac{1}{m}\right)$.

a/ Montrer que Ω est un centre de symétrie pour H_m .

b/ Quel est l'ensemble F des points Ω lorsque m varie ?

5) Soit D_p la droite d'équation $y = px$, $p \in \mathbb{R}$.

a/ Pour quelles valeurs de p , D_p coupe-t-elle H_2 en deux points M' et M'' distincts ou confondus.

b/ Soit I le point du plan d'abscisse x tel que $I \in D_p$ et $\frac{x}{4} = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$ (x' : abscisse de M' ; x'' : abscisse de M'')

Trouver, en fonction de p , les coordonnées de I . Quel est l'ensemble des points I lorsque p varie ? Le tracer

Exercice N°3 :

Soit la fonction f_a définie par $f_a(x) = \frac{2x(1-ax)}{1-x^2}$ ($a \in \mathbb{R}$)

1) Déterminer a pour que f_a soit monotone sur son domaine.

2) Déterminer a pour que f_a admette un maximum et un minimum. Soient M_1 et M_2 les points correspondant au minimum et au maximum respectivement. Calculer leurs abscisses x_1 et x_2 en fonction de a .

3) Pour $a > 1$, on pose $a = \frac{1}{\sin \theta}$ avec $\theta \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$. Montrer que $\{x_1, x_2\} = \left\{ \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} \right\}$.

Exercice N°4:

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 5}{x - 1}$.

- 1) Trouver les trois réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$
- 2) Étudier les variations de f et tracer sa courbe $\mathcal{C}_f$ dans un plan rapporté à un R.O.N $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 3) Soit Δ_m une droite passant par $I(1, -3)$ et de coefficient directeur $m \in \mathbb{R}$
 - a/ Donner une équation de Δ_m .
 - b/ Trouver graphiquement, suivant les valeurs de m , le nombre de solutions de chacune des équations suivantes
$$(1) : f(x) = mx - (3 + m) \qquad (2) : f(|t|) = m|t| - (3 + m)$$
- 4) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \left\lfloor \frac{x^2 - 5x + 5}{x - 1} \right\rfloor$. Déduire la courbe de g à partir de $\mathcal{C}_f$.

Exercice N°5:

Soit f_m la fonction définie par $f_m(x) = \frac{-x^2 + 2x + m}{x - 1}$; ($m \neq -1$) et $\mathcal{C}_m$ sa courbe dans un R.O.N $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Montrer que $\mathcal{C}_m$ admet deux asymptotes que l'on précisera.
- 2) Tracer $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_{-2}$ dans $\mathcal{R}$. Soit A le point de $\mathcal{C}_0$ d'abscisse 0 et M le point de $\mathcal{C}_{-2}$ d'abscisse x .
Déterminer x pour que l'aire de OAM soit minimale.
- 3) Soit $\Omega(1, 0)$ et D la droite d'équation $y = kx - k$ ($k \in \mathbb{R}$)
 - a/ Discuter suivant k , le nombre de points d'intersection de D avec $\mathcal{C}_{-2}$.
 - b/ Lorsque D rencontre $\mathcal{C}_{-2}$ en M' et M'' , montrer que $\Omega = M' * M''$

Exercice N°6:

(I) Soient f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un R.O.N $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Étudier les variations de f
 - 2) Démontrer que $I(1, 1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}$. Tracer $\mathcal{C}$ (unité : 2 cm)
- (II) Soient p un paramètre réel et D_p la droite d'équation $y = -3x + p$
- 1) Démontrer que les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec D_p sont racines de l'équation :
 $4x^2 - (4 + p)x + 1 + p = 0$. Discuter suivant les valeurs de p le nombre de ces points.
 - 2) a/ On suppose que $p = 0$. Déterminer les coordonnées du point A , point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec D_0 . Tracer D_0 . Que peut-on dire de D_0 et de $\mathcal{C}$.
b/ Faire un travail analogue pour $p = 8$. On appellera A' le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de D_8
 - 3) On se place dans le cas où D_p coupe $\mathcal{C}$ en deux points M' et M'' .
 - a/ Déterminer les coordonnées de $K = M' * M''$.
 - b/ Démontrer que $K \in (AA')$.
 - c/ Montrer que l'ensemble des points K lorsque P varie est la réunion de deux demi-droites à déterminer.
- (III) Soient m un réel strictement positif et D_m la droite passant par I et de coefficient directeur m .

- 1) Vérifier que le point $P\left(1 + \frac{1}{\sqrt{m-1}}; 1 + \frac{m}{\sqrt{m-1}}\right)$ est un point de $\mathcal{C} \cap D_m$
 - 2) a/ Quelles sont les coordonnées de Q , le deuxième point de $\mathcal{C} \cap D_m$?
b/ Montrer que les tangentes en P et Q à $\mathcal{C}$ sont parallèles.
-