

EXERCICE N°1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x - 4$.

- 1- a) Etudier les variations de la fonction f .
b) Montrer que la courbe représentative C_f de f admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.
c) Tracer la tangente à C_f au point I .
d) Tracer C .
- 2- En déduire la courbe représentative de la fonction $|f|$

EXERCICE N°2

Etudier les variations des fonctions suivantes ; puis étudier l'existence d'extrémum

1- $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

2- $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$

3- $f(x) = -2x^3 - 2$

EXERCICE N°3

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^3 + (m-1)x^2 + 3x + 1$ (m est un réel)

Déterminer m pour que f admette deux extréma.

EXERCICE N°4

Soit $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

Déterminer les réels a, b, c pour que f admette un extrémum pour $x=1$ et pour que la droite d'équation $y=7x+11$ soit tangente à C_f au point d'abscisse 2.

EXERCICE N°5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 2$

- 1- Etudier f et tracer C_f .
- 2- a) Montrer que le point $I(0,2)$ est un centre de symétrie de C .
b) Tracer la tangente à C au point I .
- 3- Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |f(x) - 2|$

Montrer que la fonction g est paire puis tracer sa courbe C_g dans le même repère.

EXERCICE N°6

Doit la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = -x^3 + (m-1)x^2 + 3mx - 7$, avec m un réel .

On désigne par C_m la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé .

1- Montrer que toutes les courbes C_m passent par deux points fixes.

2- a) Déterminer m pour que la courbe C_m passe par le point $I(1;-5)$

b) Tracer la courbe correspondante .

EXERCICE N°7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

1- a) Soit a un réel ; exprimer $f(x)-f(a)$ en fonction de $(x-a)$.

b) Calculer $f(-1)$ et en déduire que pour tout réel x , il existe deux réels a et b tels que : $f(x) = (x+1)(x^2+ax+b)$

c) Déduire alors les solutions de l'équation $f(x) = 0$ puis de l'inéquation $f(x) < 0$.

2- a) Montrer que C admet un point d'inflexion A .

b) Déterminer l'équation de la tangente D à C au point A .

c) Tracer C et D .

3- On appelle g la fonction définie par $g(x) = |f(x)|$

a) Déterminer les domaines de continuité et de dérivabilité de g .

b) Tracer C_g

4- Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(|x|)$. Tracer C_h

EXERCICE N°8

Soit la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = x^3 + (m-1)x^2 + 2$ et on désigne par C_m sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1- a) Etudier les variations de f_0 et montrer que C_0 est symétrique par rapport à un point A que l'on précisera .

b) Soit $\mathbf{D}$ la tangente à $\mathbf{C}_0$ au point A . Etudier les positions relatives de $\mathbf{C}_0$ et $\mathbf{D}$

Tracer $\mathbf{C}_0$ et $\mathbf{D}$

c) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f_0(x) = a$ lorsque a varie .

2- a) Montrer que toutes les droites $\mathbf{C}_m$ passent par un point fixe que l'on déterminera.

b) Soient deux réels m et n distincts , montrer que $\mathbf{C}_m$ et $\mathbf{C}_n$ se coupent en un point unique que l'on précisera.

c) Etudier les variations de f_m .

d) Montrer que pour tout réel m , $\mathbf{C}_m$ admet un point d'inflexion $\mathbf{I}_m$.

e) Quel est l'ensemble des points $\mathbf{I}_m$ quand m varie ? Le représenter dans le même repère .

EXERCICE N°9

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x + 1$

1- a) Déterminer les variations de f .

b) Déterminer une équation de la tangente $\mathbf{D}$ à $\mathbf{C}_f$ au point $\mathbf{I}$ d'abscisse nulle et déduire la position de $\mathbf{C}_f$ par rapport à $\mathbf{D}$.

2- Montrer que $\mathbf{C}_f$ admet $\mathbf{I}$ comme centre de symétrie .

3- On appelle g la fonction définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer a, b et c pour que $\mathbf{C}_g$ ait pour sommet le point d'ordonnée le maximum relatif de f et passe par le point d'ordonnée le minimum relatif de f .

4- Représenter $\mathbf{C}_f$ et $\mathbf{C}_g$ relativement à un même repère .

5- On appelle $\mathbf{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

a) Montrer que $\mathbf{D}_m$ coupe $\mathbf{C}_g$ en deux points $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ distincts .

b) Soit $\mathbf{M}(x, y)$ le milieu du segment $[\mathbf{AB}]$. Déterminer l'ensemble des points $\mathbf{M}$ quand m varie

EXERCICE N°10

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$.

- 1- Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative C_f dans un repère orthonormé.
- 2- En déduire la représentation graphique de la fonction f .

EXERCICE N°11

Soit la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = (m-1)x^4 - 3mx^3 + (3m+2)x^2 - mx - 1$

On appelle C_m sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

- 1- a) Etudier les variations de f_0 et f_1 .
 b) Etudier la position de C_0 par rapport à C_1 .
 c) Tracer C_0 et C_1 .
 d) Déterminer le nombre de points d'intersection de C_0 avec chacun des axes.
- 2- Montrer que toutes les courbes C_m passent par deux points fixes .
- 3- Montrer que toutes les courbes C_m sont tangentes en l'un des points fixes.

EXERCICE N°12

Soit la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = mx^4 - (m-1)x^2 + 2$ où m est un réel .

- 1- Montrer que toutes les courbes C_m de f_m passent par des points fixes que l'on déterminera .
- 2- Etudier suivant les valeurs de m le sens de variation de la fonction f_m .
- 3- Tracer C_{-1} , $C_{1/2}$ et C_2 .

EXERCICE N°13

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 2$

- 1- Etudier la parité de f et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}_+$
- 2- On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

Montrer que C coupe l'axe des abscisses en deux points distincts que l'on déterminera .

- 3- Tracer C et déterminer graphiquement le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $f(x) = 0$

EXERCICE N°14

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + x$

- 1- Etudier f et construire sa courbe C dans un repère orthonormé.
- 2- Donner une équation de la tangente D à C au point I d'abscisse 0.
- 3- Etudier les positions relatives de C et D . Construire D
- 4- Montrer que I est un point d'inflexion de C
- 5- I est-il un centre de symétrie de C ? Pourquoi ?

EXERCICE N°15

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 2$

- 1- Etudier f et tracer C_f .
- 2- a) Montrer que le point $I(0,2)$ est un centre de symétrie de C .

b) Tracer la tangente à C au point I .

- 3- Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x^3| - 3|x| + 2$

Montrer que la fonction g est paire puis tracer sa courbe C_g dans le même repère.

EXERCICE N°16

- 1- Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3x + 4$ et tracer sa courbe représentative (C) .
- 2- Pour tout réel m on désigne par (C_m) la courbe d'équation : $y = mx^2 - (m-6)x + 4$

Démontrer que toutes les courbes (C_m) passent par deux points fixes A et B dont on déterminera les coordonnées.
- 3- Discuter, suivant les valeurs de m , le nombre de points communs à (C) et à (C_m) .
- 4- S'il existe un point M commun à (C) et (C_m) , tel que les tangentes à (C) et à (C_m) soient confondues. On dit C et (C_m) sont tangentes au point M . M est appelé le point de contact.
- 5- Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les courbes (C) et (C_m) sont tangentes.

Déterminer les coordonnées des points de contact et les équations aux courbes en ces points.

EXERCICE N°17

Soit la fonction f_m définie par $f_m(x) = (2m+1)x^3 - mx - m + 1$; On appelle C_m sa courbe

- 1- Etudier le sens de variation de f_m suivants les valeurs de m .
- 2- Démontrer que toutes les courbes C_m passent par un point fixe A
- 3- Déterminer les coordonnées du point d'inflexion I_m de C_m . Ecrire l'équation de la tangente en I_m à C_m . Démontrer que cette droite passe par un point fixe lorsque m varie.
- 4- Pour une valeur x_0 de l'abscisse les tangentes aux courbes C_m sont parallèles entre elles lorsque m varie. Déterminer les valeurs possibles de x_0 .
- 5- Deux courbes C_m distinctes ont-elles des points communs autres que A.
- 6- Construire C_1 et $C_{-1/2}$.
- 7- Discuter suivant les valeurs du paramètre réel t , en utilisant C_1 le nombre de solutions de l'équation : $6x^3 - 2x - 2t + 2 = 0$
- 8- Résoudre graphiquement le système
$$\begin{cases} 3x^3 - x - y \geq 0 \\ 2y - x - 3 < 0 \end{cases}$$
 .

PROBLEMES D'OPTIMISATION

EXERCICE N°1

Un rectangle de dimensions x et y a pour périmètre 60 cm.

- 1- Calculer ,en fonction de x l'aire $A(x)$ du rectangle.
- 2- Déterminer x et y pour que l'aire du rectangle soit maximale.

EXERCICE N°2

Un rectangle de dimensions x et y a pour aire 121 cm^2 .

- 1- Calculer son périmètre $p(x)$ en fonction de x
- 2- Déterminer x et y pour que $p(x)$ soit minimum.

EXERCICE N°3

Soit un triangle équilatéral ABC de côté a .M étant un point de $[BC]$ distinct de B et C ,on désigne par H et K les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AB) et (AC).On pose $BM = x$

1- Calculer ,en fonction de x ,l'aire $A(x)$ du quadrilatère AHMK.

2- Déterminer x pour que $A(x)$ soit maximale.

EXERCICE N°4

ABC est un triangle isocèle de sommet A inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1 .La droite (AO) coupe (BC) en H .A est fixe et B et C sont variables.

1- Calculer en fonction de x l'aire $A(x)$ du triangle ABC

2- Etudier les variations de $f(x) = A(x)^2$

3- Déterminer x pour que l'aire $A(x)$ soit maximale.

Montrer que ,dans ce cas , le triangle ABC est équilatéral.