

Géométrie dans l'espace

1 L'espace E étant rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 1 + \cos \alpha \\ \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} \sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \alpha \in]0; \pi] \text{ et les points } A(1, -1, 2) \text{ et } B(-2, \frac{1}{2}, 1)$$

1/ On suppose que $\alpha \neq \pi$

a) Montrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires et déterminer une représentation paramétrique du plan $P(O, \vec{v}, \vec{w})$ puis une équation cartésienne, de la droite $D(A, \vec{u})$ et de D' la perpendiculaire à P passant par B .

b) Étudier la position relative de D par rapport à P et D'

2/ Soient les points $C \left(\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} + 1; \frac{3}{2}p - 1; 3 \right)$ et $D \left(1 - \frac{p^2}{\sin \frac{\alpha}{2}}; -1 - \frac{p}{2}; \frac{3}{2} \right)$ où p est un réel.

a) Trouver une relation entre p et α pour que la relation $\vec{v} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DA}$ soit vérifiée.

b) Exprimer alors les coordonnées de C et D en fonction de α .

c) Soit $I = C * D$. Montrer que $\Delta(I, \overrightarrow{AI}) \parallel D$

3/ Dans la suite de l'exercice, on prendra $\alpha = \pi$

Soit le plan $P_m: (m^2 - 2)x - y - 2mz + 3m + 5 = 0$ ($m \in \mathbb{R}$)

a) Pour quelles valeurs de m P_m contient-il le point C ?

b) Existe-t-il un plan P_m parallèle à (CD) ? perpendiculaire à (CD) ?

c) Déterminer les ensembles suivants :

$$E_1 = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} P_m \quad ; \quad E_2 = P_0 \cap P_4 \quad ; \quad E_3 = \{ M(x, y, z) \in E ; d(M, P_{-1}) < 2 \}$$

d) Déterminer les coordonnées de A' , B' et C' points d'intersection du plan P_1 avec les axes $(O; \vec{i})$, $(O; \vec{j})$ et $(O; \vec{k})$ puis montrer que C' appartient au plan médiateur de $[A'B']$.

2 Dans tout l'exercice, λ désigne un réel strictement positif.

Dans l'espace E , rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point $A(\lambda, 0, 0)$; et le point C tel que les angles $\widehat{CAO}$, $\widehat{AOC}$ et $\widehat{OCA}$ du triangle AOC soient proportionnels à 2, 4 et 6.

1/ a) Montrer que C appartient à la sphère S de diamètre $[OA]$.

b) Montrer que C appartient à la sphère S' de centre A et de rayon $\frac{\lambda\sqrt{3}}{2}$

c) En déduire que C varie sur un cercle dont on déterminera le rayon et l'axe.

2/ Soit $E = \{ M(x, y, z) \in E ; \begin{cases} x = \lambda \cos \alpha \cdot \cos \beta \\ y = \lambda \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ z = \lambda \sin \alpha \end{cases} ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \}$

a) Montrer que E est une sphère et étudier sa position par rapport à S et S' .

b) Déduire qu'il existe un plan tangent à la fois à S et à E en un point que l'on déterminera.

3/ On considère les sphères $S_n(I_n, R_n)$ avec $I_n(0; 3(R_n - 1); 0)$ et $n \in \mathbb{N}$

a) Démontrer que si S_n est tangente à S_{n+1} alors $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

b) Existe-t-il un plan P_n tangent à toutes les sphères S_n . Si oui en déterminer une équation cartésienne.