

**Rapports trigonométriques d'angle aigu
Relations métriques dans un triangle rectangle**

Exercice N°1:

Dans un trapèze ABCD rectangle en A et D.
On donne $AB = 30\text{cm}$; $CD = 18\text{cm}$ et $BC = 20\text{cm}$.

- 1) Calculer les angles $\hat{A}BC$ et $\hat{B}CD$.
- 2) Calculer les angles $\hat{D}AC$ et $\hat{A}DB$ et les diagonales du trapèze.

Exercice N°2:

Dans un triangle ABC rectangle en A et de hauteur [AH]. On pose $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$; $AH = h$; $CH = b'$ et $BH = c'$. Calculer les éléments inconnus sachant que :

- 1) $b = 130$; $c = 312$ 2) $b = 156$; $b' = 144$ 3) $b = 136$; $h = 120$ 4) $b = 255$; $c' = 64$

Exercice N°3:

On considère un triangle ABC isocèle en C tel que $\hat{A}CB$ est un angle aigu.

Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC), on pose $AC = a$ et $\hat{A}CB = \alpha$ ($a > 0$)

- 1) Montrer que l'aire du triangle ABC est : $A = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha$
- 2) On désigne par I le milieu du segment [AB]
 - a. Exprimer IC, AI et AB en fonction de a et $\frac{\alpha}{2}$
 - b. En déduire que : $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$

Exercice N°4:

ABC est un triangle rectangle en B tel que : $\hat{C} = 30^\circ$

- 1) La bissectrice de l'angle $\hat{A}CB$ coupe (AB) au point I. Calculer le quotient $\frac{IA}{IB}$
- 2) On pose $AB = a$. Calculer en fonction de a la distance IB
- 3) Donner la valeur exacte de $\tan 15^\circ$

Exercice N°5:

Soit x un angle aigu. On considère le réel $A = \cos^3 x - \sin^3 x + 3(\sin x - \cos x)$

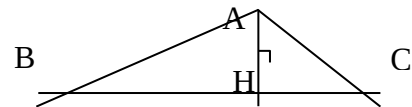
- 1) Montrer que $A = (\sin x - \cos x)(2 - \sin x \cdot \cos x)$
- 2) On donne $\cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Calculer le réel A
- 3) Donner la valeur de l'angle x pour que $A = 0$.

Exercice N°6:

Dans la figure ci-contre, ABC désigne un triangle non rectangle, H le projeté orthogonal de A sur [BC].

On donne $AB = 4$, $AC = 3$ et $AH = 2$ (l'unité est le cm)

- 1) Calculer BC
- 2) Calculer $\sin(\hat{A}BC)$. En déduire la mesure de l'angle $\hat{A}BC$.
- 3) Soit (ζ) le cercle circonscrit au triangle ABC et E le point diamétralement opposé à A.
 - a. Montrer que $\hat{A}EC = 30^\circ$ puis calculer le rayon R du cercle (ζ)
 - b. Calculer BE
- 4) La tangente à (ζ) en E coupe (AB) en F, calculer BF.



Exercice N°7:

On considère un triangle ABC rectangle en A et tel que $AB > AC$ et les points O milieu du segment [BC] et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). On pose $BC = 2a$ ($a > 0$) et $\hat{A}BC = \alpha$

- 1) Calculer en fonction de a et α les distances AB et BH
- 2) Montrer que $\hat{A}OC = 2\alpha$, en déduire la distance OH en fonction de a et α
- 3) a) Déduire des questions précédentes que $1 + \cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha$
b) Calculer $\cos(22,5^\circ)$
- c) Sachant que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$, Calculer $\cos(2\alpha)$ et en déduire α .

Exercice N° 8 :

L'unité est le centimètre, on considère un triangle isocèle ABC de sommet principale A et de hauteur [AD] telle que $AD = BC = 10$

- 1) le cercle (ζ) de diamètre [BC] recoupe [AB] en F et [AC] en E et coupe [AD] en I
 - a) Calculer AC
 - b) Montrer que les droites (BE), (CF) et (AD) sont concourants en un point H
- 2) a) Calculer de deux façons différentes $\sin(\widehat{A} \hat{C} B)$, en déduire la valeur de BE
 - b) Calculer alors EC
- 3) a) Calculer $\tan \widehat{E} \hat{B} C$
 - b) En déduire HD et que H est le milieu de [ID]

Exercice N° 9 :

Soit (ζ) un cercle de centre O et de diamètre [AB], M est un point de (ζ) tel que $AM > BM$

Et H le projeté orthogonal de M sur [AB]. On pose $\widehat{B} \hat{A} M = x$

- 1) Calculer de deux manières différentes $\cos x$, en déduire que $\cos^2 x = \frac{AH}{AB}$
- 2) a) Exprimer l'angle $\widehat{H} \hat{O} M$ en fonction de x.
 - b) En déduire que $1 + \cos 2x = \frac{AH}{OM}$ et que $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$
- 3) a) Vérifier que $\frac{2 + \sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right)^2$
 - b) Montrer que $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$

Exercice N° 10 :

- 1) Soit α un angle tel que $\cos \alpha > \sin \alpha$ et $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{4}{3}$
 - a. Calculer $\cos \alpha \cdot \sin \alpha$
 - b. Montrer que $\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{3}{2}$
 - c. En déduire $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$

- 2) Soit un angle aigu α tel que $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{3}{2}$.

Calculer $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$; $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$; $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$

- 3) Soient x et y deux angles aigu, montrer que
 - a. $\sin^2 x \cos^2 y - \sin^2 y \cos^2 x = (\sin x + \sin y)(\sin x - \sin y)$
 - b. $(1 + \tan x + \frac{1}{\cos x})(1 + \tan x - \frac{1}{\cos x}) = 2 \tan x$

- 4) x est la mesure d'un angle aigu
 - a. On pose $a = \cos x + \sin x$ et $b = \cos x - \sin x$. Montrer que $a^2 = 2b + 1$
 - b. Sachant que $a = \sqrt{2}$ calculer b
 - c. a et b ayant les valeurs trouvées à la question précédente. Calculer $\sin x$, en déduire x.
- 5) ABC est un triangle isocèle de sommet principal A. Déterminer les dimensions de ce triangle sachant que son périmètre est égale à 28 cm et $\cos(\widehat{A} \hat{B} C) = \frac{3}{4}$

Exercice N° 11 :

Soit un triangle ABC dont les angles sont aigus. On pose $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$

Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC)

- 1) Calculer BH, AH et HC en fonction de b, c, $\sin \hat{A}$ et $\cos \hat{A}$.

En déduire la relation : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$

- 2) Soit (ζ) le cercle circonscrit au triangle ABC et R son rayon montrer que $R = \frac{a}{2 \sin \hat{A}}$

Application : on donne $a = \sqrt{5}$, $b = 3$ et $c = 2\sqrt{2}$

Calculer $\cos \hat{A}$ en déduire la mesure de l'angle $\hat{A}$ et le rayon R.

Exercice N° 11 :

L'unité est le centimètre, on considère un triangle isocèle ABC de sommet principale A et de hauteur [AD] telle que $AD = BC = 10$
L'unité est le centimètre, on considère un triangle isocèle ABC de sommet principale A et de hauteur [AD] telle que $AD = BC = 10$

- 1) Le cercle de diamètre [BC] recoupe [AB] en F et [AC] en E et coupe [AD] en I
 - a. Calculer AC
 - b. Montrer que les droites (BE), (CF) et (AD) sont concourants en un point H
- 2) a. Calculer de deux façons différentes : $\sin \hat{A}$ B. En déduire que $BE = 4\sqrt{5}$
 - b. Calculer alors EC
- 3) a. Calculer $\tan \hat{E}$ B C
 - b. Déterminer HD. En déduire que H est le milieu de [ID]