

Exercice 1 :

x et y sont deux réels tels que : $x + y = 1$. Montrer que: $2(x^3 + y^3) - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0$

Exercice 2 :

x est un réel non nul tel que : $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$. Calculer $x^2 + \frac{1}{x^2}$ et $x^3 + \frac{1}{x^3}$

Exercice 3 :

Soit $f(x) = 4x^2 + 6x - \frac{3}{2}$

- 1) Calculer $f(a+1) - f(a-1)$
- 2) En déduire la valeur de $f(1001) - f(999)$

Exercice 4 :

Soit $f(x) = x^3 - 8$. Calculer $f(3\sqrt{2} - 1) - f(3\sqrt{2} + 1)$

Exercice 5 :

a, b et c étant trois réels tels que $a + b + c = 0$

- 1) Montrer que $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
- 2) Déterminer alors le réel x sachant que : $(2x + 1)^3 + (3 - x)^3 + (-x - 4)^3 = 0$

Exercice 6 :

- 1) Factoriser $x^8 - 1$
- 2) Factoriser le réel $A = x^8 - 1 - \frac{x^4}{4} (x^2 + 1) (x^4 + 1)$
- 3) En déduire le signe de A

Exercice 7 :

- 1) Vérifier que pour tous réels a et b on a : $\frac{3}{4} (a + b)^2 + \frac{1}{4} (a - b)^2 = a^2 + ab + b^2$
- 2) En déduire que $(a^3 - b^3)$ et $(a - b)$ sont de même signe.

Exercice 8 :

- 1) Ecrire sous la forme $(a + b)^2$ ou $(a - b)^2$ les nombres suivants :

$$5 + 2\sqrt{6} ; 5 - 2\sqrt{6} ; 12 - 2\sqrt{35} ; 23 + 6\sqrt{10} ; 11 + 6\sqrt{2}$$

- 2) Montrer que $\sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}} = 6$

Exercice 9 :

- 1) Montrer que $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$
- 2) Ecrire le nombre 61×113 sous la forme d'une somme de deux carrés
- 3) Factoriser $(xy + 2)^2 + (x - 2y)^2$

Exercice 10 :

Factoriser les expressions suivantes :

$$E = (x^2 - 16)^2 - 9(x - 4)^2 ; F = b^2 + 2ac - a^2 - c^2 ; G = 16x^3 + 2 - (2x + 1)(4x^2 + 1)$$

Exercice 11 :

1) Factoriser $A = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - (x + 2)^2(2x - 1)$ et $B = x^3 + (x + 1)(5x + 3) + 1$

2) On suppose que x est un réel strictement supérieur à 3. Montrer que $A < B$

Exercice 12 :

1) Simplifier l'expression $M = \frac{(x+1)^4 - (x-1)^4}{8x^5 + 16x^3 + 8x}$

a) Soient a et b deux réels tels que : $a - b = -1$. Montrer que $2(a^3 - b^3) - 3(a^2 + b^2) - 1 = 0$

b) x et y sont deux réels tels que $x^2 + y^2 = 1$. Montrer que $x^6 + y^6 + 3x^2y^2 = 1$; $3(x^4 + y^4) - 2(x^6 + y^6) = 1$

2) montrer que : $x^3 - y^3$ et $x - y$ sont de même signe.

Exercice 13 :

1) Calculer $A = (\sqrt{2} + 1)^{-2} + (\sqrt{2} - 1)^{-2}$

2) On donne $x = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ et $y = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$

a) Montrer que x et y sont inverses

b) Calculer $(x - y)^2$, en déduire $x - y$ puis calculer $x^3 - y^3$

3) Factoriser l'expression suivante: $x^6 + 8$, en déduire que pour tout réel x , $x^4 > 2x^2 - 4$

4) a et b sont deux réels positifs :

a) Montrer que $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$

b) Montrer que : si $(a \leq b \text{ et } a + b = 1)$ alors $\sqrt{a^3 + ab^2} \leq b$

Exercice 14 :

1) a) Montrer que $\frac{\sqrt{45} - \sqrt{35}}{(3 - \sqrt{7})(\sqrt{20} - \sqrt{5})} = 1$

b) Soit x un réel positif, simplifier l'expression : $A = (\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x} + \sqrt{3})(\sqrt{2x+3} - \sqrt{2x} - \sqrt{3})$

2) a) Ecrire le réel $11 - 4\sqrt{7}$ sous la forme $(a - b)^2$

b) Factoriser l'expression $B = (2 - t)^2 - 11 + 4\sqrt{7} + t^2 - 7$

c) Déterminer les réels x tels que $\sqrt{x^2 + 1} = 4 - \sqrt{7}$

3) On donne les expressions suivantes :

$$C = (x - 1)^3 - 8 - 2(x - 3)(x + 1) \text{ et } D = 4(x - 1)^2 - (x + 1)^2 + x(x - 3)^2$$

a) Factoriser C et D

b) Déterminer les réels x tels que $D = 0$

c) Vérifier que lorsque : $D \neq 0$, $\frac{C}{D} = \frac{x-1}{x+1}$

4) On donne $x = 2 - \sqrt{3}$, on pose $t = \frac{\sqrt{2x^2 + 2}}{4(x-1)}$. Calculer t^2 en déduire la valeur de t .