

CHAPITRE 5

DERIVATION

I. LIMITE D'UNE FONCTION EN 0.

1. Limite en zéro des fonctions usuelles.

On dit que $\sqrt{x}, x, x^2, x^3$ tendent vers 0 lorsque x tend vers 0.

On note : $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$$

On dit aussi que les fonctions : $x \mapsto x, x \mapsto \sqrt{x}, x \mapsto x^2, x \mapsto x^3$ ont pour limite 0 en 0.

$|f(x)|$ est inférieur à $10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-9}, \dots, 10^{-p}$ dès que x est assez petit.

2. Limite en zéro : cas général.

Soit I un intervalle de la forme $]0; a[$ ou $] -a; 0[$ (où a est un réel strictement positif) et f une fonction définie au moins sur I .

1. On dit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 est égale à 0 si $|f(x)|$ est inférieur à $10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-p}, \dots$ dès que x est assez proche de 0.

On écrit alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

2. On dit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 est égale à ℓ si la limite de $(f(x) - \ell)$ quand x tend vers 0 est égale à 0.

Exercice :

$$g : x \mapsto \sqrt{x} + 5 \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 5$$

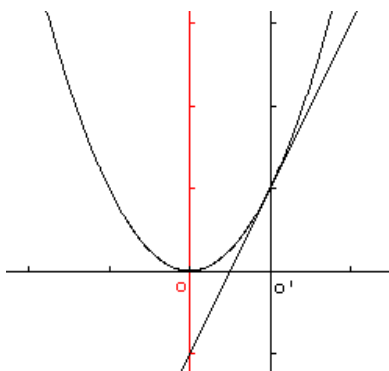
$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 0} |g(x) - 5| = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$$

$$\text{ou encore car : } g(x) = 5 + \varphi(x) \text{ où } \varphi(x) = \sqrt{x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0.$$

II. APPROXIMATION AFFINE D'UNE FONCTION.

Rappel : Une fonction affine est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la forme : $x \mapsto ax + b$ où a et b sont des nombres réels.

1. Approximation affine de la fonction carré au voisinage de 1 :



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)^2$

$$\text{On a } (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

Si $|x|$ est proche de 0 alors x^2 est négligeable devant $2x$.

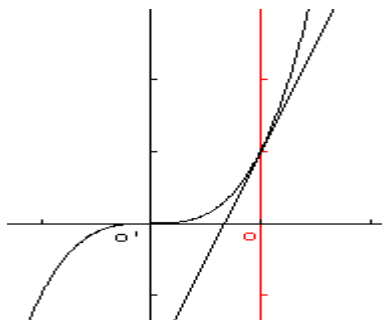
Aussi, pour des valeurs de x proche de 0, $1+2x$ est une approximation affine de $(1+x)^2$.

L'erreur commise est égale à x^2 .

Si $|x| \leq 10^{-2}$, alors l'erreur commise est inférieure à 10^{-4} .

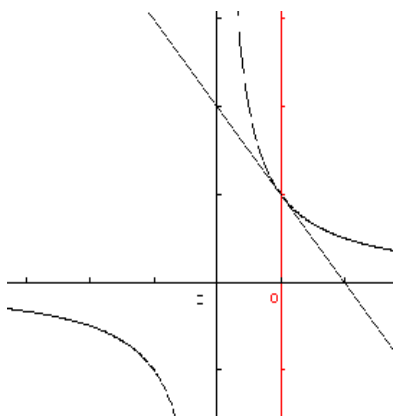
$$1.001^2 \approx 1 + 2 \times 0.001 \quad \text{Donc } 1.001^2 \approx 1.002$$

2. Approximation affine de la fonction cube au voisinage de 1 :



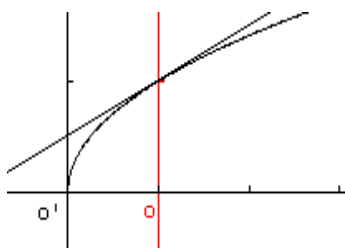
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)^3$
On a $(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$
Si $|x|$ est proche de 0 alors $3x^2$ et x^3 sont négligeables devant $3x$.
Aussi, pour des valeurs de x proche de 0, $1+3x$ est une approximation affine de $(1+x)^3$.
L'erreur commise est égale à $3x^2+x^3$.

3. Approximation affine de la fonction inverse au voisinage de 1 :



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$
On a $\frac{1}{1+x} = \frac{1+x-x(1+x)+x^2}{1+x} = 1-x+\frac{x^2}{1+x}$
Si $|x|$ est proche de 0 alors $\frac{x^2}{1+x}$ est négligeable devant x .
Aussi, pour des valeurs de x proche de 0, $1-x$ est une approximation affine de $\frac{1}{1+x}$.
L'erreur commise est égale à $\frac{x^2}{1+x}$.

4. Approximation affine de la fonction racine carrée au voisinage de 1 :



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$
On a, $\left(1+\frac{x}{2}\right)^2 = 1+x+\frac{x^2}{4}$
Si $|x|$ est proche de 0 alors $\frac{x^2}{4}$ est négligeable devant x .
Ainsi, pour des valeurs de x proche de 0, $1+\frac{x}{2}$ est une approximation affine de $\sqrt{1+x}$. L'erreur commise est égale à $\frac{x^2}{4}$.

III. DERIVATION EN UN POINT.

1. Définition et notion de tangente.

Définition : Soit f la fonction définie sur un intervalle I ouvert contenant x_0 . On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe un réel a et une fonction φ tels que :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h \varphi(h), \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0,$$

et cela pour tout h tel que $x_0 + h$ appartient à I .

Le nombre a est alors appelé le **nombre dérivé** de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$.

Exemple : soit f la fonction définie sur Ψ par $f(x) = x^3$. On prend $x_0=2$.

On obtient $f(2+h) - f(2) = 12h + 6h^2 + h^3 = 12h + (6h^2 + h^3)$.

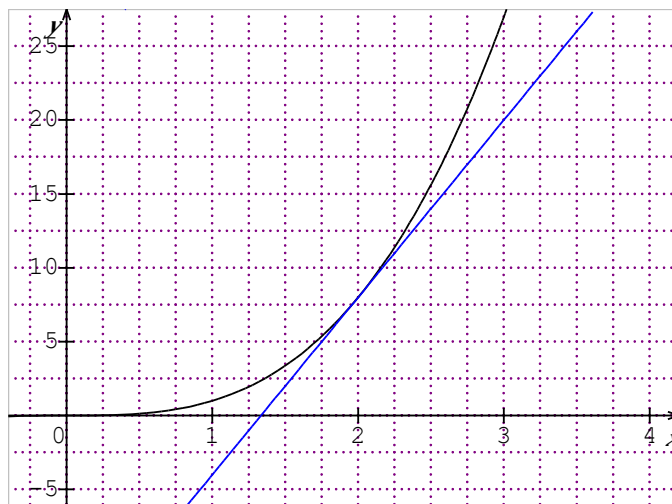
On peut alors écrire $f(2+h) = f(2) + 12h + h \varphi(h)$, avec $\varphi(h) = 6h + h^2$.

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$, la fonction f est dérivable en 2, et 12 est le nombre dérivé de f en 2.

On écrit alors $f'(2) = 12$.

Définition : Soit f une fonction dérivable en x_0 . On appelle **tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0** la droite passant par le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'(x_0)$.

Exemple : on reprend la fonction précédente : $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$ et $f'(2) = 12$. La droite passant par le point de coordonnées $(2, f(2))$ et de coefficient directeur 12 est la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.



Théorème : Soit f une fonction dérivable en x_0 . la courbe représentative de f admet au point d'abscisse $A(x_0, f(x_0))$ une tangente dont une équation est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Exemple : on reprend l'exemple précédent. Comme $f(2) = 8$, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2 a pour équation : $y = 12(x-2) + 8$. L'équation réduite de la tangente est $y = 12x - 16$.

2. Taux de variation et nombre dérivé.

Définition : Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 . On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Le coefficient directeur de la droite passant par les points de la courbe $\mathcal{C}$, d'abscisses respectives x_0 et $x_0 + h$ est le nombre $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Ce nombre est appelé **taux de variation de f entre x_0 et $x_0 + h$** .

Théorème : Soit la fonction f définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 . Alors f est dérivable en x_0 , de nombre dérivé a si et seulement si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a$.

3. Interprétation cinématique.

On considère un objet mobile qui se déplace sur un axe muni d'un repère. Sa position à l'instant t est repérée par sa coordonnée $x(t)$ sur cet axe.

La vitesse moyenne de cet objet entre les instants t_0 et $t_0 + h$ est $\frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}$. Si la fonction

x est dérivable en t_0 , alors l'expression $\frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}$ admet une limite quand h tend vers 0.

Cette limite, le nombre dérivé de x en t_0 , est la vitesse instantanée de l'objet à l'instant t_0 .

IV. FONCTION DERIVEE.

1. Définition.

La fonction f est dite dérivable sur I lorsqu'elle est dérivable en tout point a de I . La fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x : $x \mapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f . On la note f' .

2. Dérivées des fonctions usuelles.

A partir de la définition et par le même type de calcul que celui fait dans l'exemple du paragraphe précédent, on démontre les suivants :

Fonction f définie sur :	Par :	Dérivable sur :	Fonction dérivée f' définie par :
Ψ	$f(x) = k$ (constante)	Ψ	$f'(x) = 0$
Ψ	$f(x) = x$	Ψ	$f'(x) = 1$
Ψ	$f(x) = x^n$ (n entier naturel strictement positif)	Ψ	$f'(x) = n x^{n-1}$
$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$	$f(x) = \frac{1}{x^n}$ (n entier naturel strictement positif).	$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$[0 ; +\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$] 0 ; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Ψ	$f(x) = \sin x$	Ψ	$f'(x) = \cos x$
Ψ	$f(x) = \cos x$	Ψ	$f'(x) = -\sin x$

V. OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVABLES.

1. Somme de deux fonctions.

Théorème : Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I de Ψ , alors $u + v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$.

Exemple : dériver la fonction $f(x) = x^4 + \sin x$.

2. Produits de deux fonctions

Théorème : Si u est une fonction dérivable sur I de Ψ et k une constante réel, alors ku est dérivable sur I et $(ku)' = k u'$.

Théorème : toute fonction polynôme est dérivable sur Ψ .

Exemple : Dériver la fonction $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 6x - 7$.

Théorème : Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I , alors uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

Exemple : Dériver la fonction $f(x) = x^5 \cos x$.

Théorème : Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de Ψ , alors u^2 est dérivable sur I et $(u^2)' = 2u' u$.

3. Inverse d'une fonction.

Théorème : Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de Ψ , et si pour tout x de I , $u(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

Exemple : Dériver la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

4. Quotient de deux fonctions.

Théorème : Si u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I de Ψ , et si pour tout x de I , $u(x) \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Théorème : toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle de son ensemble de définition.

Exemple : Dériver la fonction f définie sur $] -\frac{1}{3}; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x-3}{3x+1}$.

5. Fonction composée avec une fonction affine.

Théorème : Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de Ψ , et si pour tout x d'un intervalle J , $ax+b$ appartient à I , alors la fonction $g : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur J et $g'(x) = a \times f'(ax+b)$.

Exemple : soit la fonction $g(x) = \sqrt{2x+3}$. Alors g est dérivable sur $[-\frac{3}{2}, +\infty[$.

g est la composée de $f(x) = \sqrt{x}$ avec la fonction affine $2x+3$.

On peut donc calculer la dérivée de g , on a $g'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$.

6. Notation différentielle.

En physique ou même en mécanique, on utilise la notation différentielle.

La fonction dérivée f' est alors notée $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Exemple : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x^3$ $\frac{\partial f}{\partial x} = -15x^2$