

CONCOUR 2011

EXERCICE N°1

Soit a et b deux réels tels que $a < b$

A/ Soit φ et ψ deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles :

. pour tout réel x appartenant à $[a, b]$, $\psi(x) \geq 0$

Il existe un réel x_0 appartenant à $[a, b]$, $\psi(x_0) \neq 0$

Montrons qu'il existe un réel α appartenant à $[a, b]$, tel que

$$\int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx = \varphi(\alpha) \int_a^b \psi(x) dx$$

φ est une fonction continue sur $[a, b]$ il existe deux réels M et m tels que pour tout réel x appartenant à $[a, b]$,

$$m \leq \varphi(x) \leq M$$

Or pour tout réel x appartenant à $[a, b]$, $\psi(x) \geq 0$ donc $m\psi(x) \leq \varphi(x)\psi(x) \leq M\psi(x)$

$$\Rightarrow m \int_a^b \psi(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx \leq M \int_a^b \psi(x) dx \quad (1)$$

Comme il existe un réel x_0 appartenant à $[a, b]$, $\psi(x_0) \neq 0$ et pour tout réel x appartenant à $[a, b]$, $\psi(x) \geq 0$ Alors

$\int_a^b \psi(x) dx > 0$ la relation (1) Devient

$$m \leq \frac{\int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx}{\int_a^b \psi(x) dx} \leq M$$

Il existe donc un réel α appartenant à $[a, b]$ tel que $\varphi(\alpha) = \frac{\int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx}{\int_a^b \psi(x) dx}$ d'où

$$\int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx = \varphi(\alpha) \int_a^b \psi(x) dx$$

B/ soient f et g deux fonctions définies sur $[a, b]$ tels que :

. g est continue sur $[a, b]$.

. f est dérivable et strictement croissante sur $[a, b]$ et sa fonction dérivée est continue sur $[a, b]$.

On désigne par G la primitive de g sur $[a, b]$ qui s'annule en a .

1) Justifie que $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(b)G(b) - \int_a^b G(x)f'(x) dx$.

2) En déduire qu'il existe un réel c de $[a, b]$ tel que $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^b g(x) + f(b) \int_a^b g(x) dx$.

1) Puisque f est dérivable sur $[a, b]$ et sa fonction dérivée est continue sur $[a, b]$

et g est continue sur $[a, b]$ donc d'après le théorème d'intégration par partie on a

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= (f(b)G(b) - f(a)G(a)) - \int_a^b (f'(x)G(x))dx \\
&= f(b)G(b) - \int_a^b (f'(x)G(x))dx \quad \text{puisque } G(a) = 0
\end{aligned}$$

2) f est dérivable et strictement croissante sur $[a, b]$ donc f vérifie pour tout réel x appartenant à $[a, b]$, $f'(x) \geq 0$

Il existe un réel x_0 appartenant à $[a, b]$, $f'(x_0) \neq 0$

et comme g est continue sur $[a, b]$ d'après la partie A il existe un réel c appartenant à $[a, b]$ tel que

$$\int_a^b (f'(x)G(x))dx = G(c) \int_a^b f'(x)dx = G(c)(f(b) - f(a)) = f(b) \int_a^c g(x)dx - f(a) \int_a^c g(x)dx$$

$$\text{or on } \int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)G(b) - \int_a^b (f'(x)G(x))dx$$

$$= f(b) \int_a^b g(x)dx - f(b) \int_a^c g(x)dx + f(a) \int_a^c g(x)dx$$

$$= f(b) \int_a^c g(x)dx + f(b) \int_c^b g(x)dx - f(b) \int_a^c g(x)dx + f(a) \int_a^c g(x)dx$$

$$= f(a) \int_a^c g(x)dx + f(b) \int_c^b g(x)dx$$

EXERCICE N° 2

1) Soit p un nombre premier et $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$

Montrons que p divise C_p^k

$$C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!} \Rightarrow k!(p-k)! C_p^k p! = p(p-1)! \Rightarrow p/k!(p-k)! C_p^k \Rightarrow \begin{cases} p/k! \\ \text{ou} \\ p/(p-k)! \\ \text{ou} \\ p/C_p^k \end{cases}$$

or p est premier donc p ne divise ni $k!$ ni $(p-k)!$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$

Donc p/C_p^k

2) Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et p premier

Montrons que $n^p \equiv n \pmod{p}$

Pour $n = 1$ $1^p \equiv 1 \pmod{p}$ vraie

On suppose que $n^p \equiv n \pmod{p}$ est vraie

$$(n+1)^p = \sum_{k=0}^p C_p^k n^k = 1 + n^p + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k n^k$$

or pour tout $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ $C_p^k \equiv 0 \pmod{p}$ d'où $(n+1)^p \equiv 1 + n^p \equiv 1 + n \pmod{p}$

Donc pour tout entier supérieur ou égal à 1 et p premier $n^p \equiv n \pmod{p}$

3) Si n est un entier négatif et non nul alors $(-n)^p \equiv -n \pmod{p}$ donc $n^p \equiv n \pmod{p}$

On a aussi $0^p \equiv 0 \pmod{p}$ donc pour tout entier x_i on a $x_i^p \equiv x_i \pmod{p}$ pour tout $i = 1, 2, \dots, N$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N x_i^p \equiv \sum_{i=1}^N x_i \pmod{p}$$



$$d' \text{ autrepant on a } \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^p \equiv \sum_{i=1}^N x_i^p \quad [p]$$

$$d' \text{ ou } \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^p \equiv \sum_{i=1}^N x_i^p \quad [p]$$

Exercice N°3

C est un cercle de centre O et de rayon R et O un point du plan

Une droite passant par O coupe le cercle C en A et B

1) Montrons que $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$ est un nombre constant p qu'on précisera.

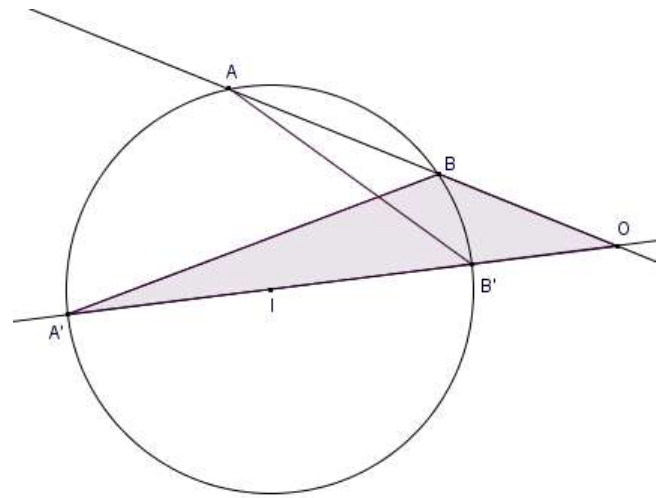
La droite (OI) coupe le cercle C en B' et A'.

Les triangle OAB' et OA'B sont semblables en effet

$\widehat{OA'B} = \widehat{OAB'}$ deux angles inscrits au cercle C et interceptent le même arc BB' et $\widehat{A'OB} = \widehat{AOB'}$

$$\text{Donc } \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{A'B}}$$

$$\text{Donc } \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OA'} \cdot \overline{OB'} = (OI + IA') \cdot (OI - IB') = OI^2 - R^2 = p$$



Le triangle OTI est rectangle en T d'après Pythagore

$$OT^2 = OI^2 - R^2 = p$$

II/

Soit O un point du plan et $k \in \mathbb{R}_+^*$

$$I(O, k) : P \setminus \{O\} \longrightarrow P \setminus \{O\}$$

$$M \longrightarrow M' \in (OM) \text{ tel que } \overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$$

1) Montrons que $I(O, k)$ est bijective.

$$I(O, k)(M) = M' \iff M' \in (OM) \text{ et } \overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$$

$$\iff M \in (OM') \text{ et } \overline{OM'} \cdot \overline{OM} = k \iff I(O, k)(M') = M$$

$I(O, k)$ est bijective et sa réciproque est elle-même.

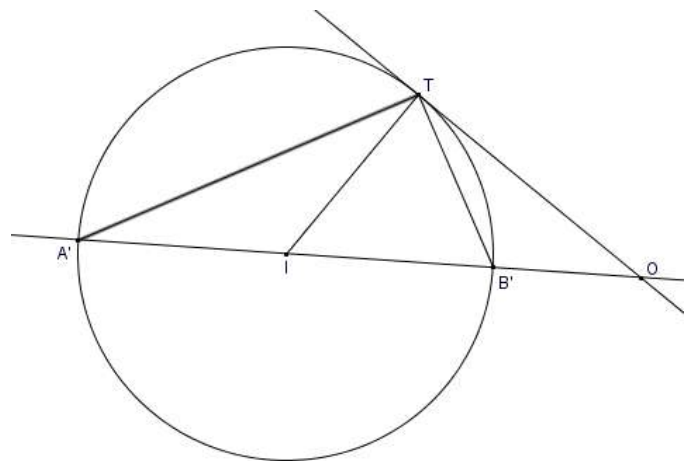
$$2) \quad I(O, k)(M) = M \iff \overline{OM} \cdot \overline{OM} = k \iff OM = \sqrt{k}$$

L'ensemble des points invariant par $I(O, k)$ est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{k}$

$$3) \quad I(O, k)(A) = A' \iff A' \in (OA) \text{ et } \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = k$$

$$I(O, k)(B) = B' \iff B' \in (OB) \text{ et } \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = k$$

On $O \notin (AB)$ donc les points A, B et A' ne sont pas alignés.



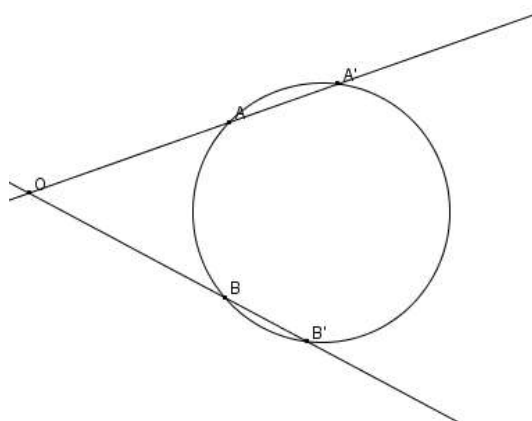
Soit C le cercle passant par les points A, B et A'
Et on pose B'' l'autre point d'intersection de C et la droite (OB)

$$\text{On a } \overrightarrow{OB'} \cdot \overrightarrow{OB''} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'}$$

$$\text{Or } \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'}$$

$$\text{donc } \overrightarrow{OB'} \cdot \overrightarrow{OB''} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB'} \iff \overrightarrow{OB''} = \overrightarrow{OB'}$$

$\iff B'$ et B'' sont confondues et par suite B' est un point de C.



4) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $h(O, \alpha)$ l'homothétie de centre O et de rapport α

Soit $M' = I(O, k)(M)$ et $M'' = h(O, \alpha)(M')$

$$I(O, k)(M) = M' \iff M' \in (OM) \text{ et } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = k$$

$$M'' = h(O, \alpha)(M') \iff \overrightarrow{OM''} = \alpha \overrightarrow{OM'}$$

$$\iff M'' \in (OM') \text{ et } \overrightarrow{OM''} = \alpha \overrightarrow{OM'}$$

On a alors $M' \in (OM)$ et $M'' \in (OM')$ donc $M'' \in (OM)$.

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM''} = \alpha \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = \alpha k. \text{ Ainsi } M'' \in (OM) \text{ et } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM''} = \alpha k \text{ donc}$$

$$I(O, \alpha k)(M) = M'' = h(O, \alpha)(M') = h(O, \alpha) \circ I(O, k)(M)$$

Ce qui prouve que $h(O, \alpha) \circ I(O, k) = I(O, \alpha k)$

5) Si $\mathcal{D}$ une droite passant par O

- Si M un point de $\mathcal{D}$

$$I(O, k)(M) = M' \Rightarrow M' \in (OM) \Rightarrow M' \text{ est un point de } \mathcal{D}$$

- Si M' est un point de $\mathcal{D}$ et tel $I(O, k)(M) = M' \iff I(O, k)(M') = M \Rightarrow M \in (OM) \Rightarrow M \text{ est un point de } \mathcal{D}$

$$\text{Donc } I(O, k)(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$$

Si $\mathcal{D}$ une droite et telle que $O \notin \mathcal{D}$

Soit A la projeté orthogonal de O sur la droite D et A' son image par $I(O, k)$.

M un point de D et M' son image par $I(O, k)$.

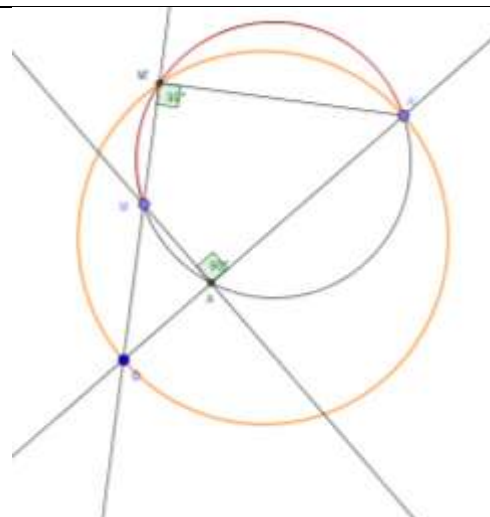
Le point $O \notin D$ les points A, A', M et M' sont sur un même cercle C

$$\text{donc } (\widehat{M'M, M'A'}) \equiv (\widehat{AM, AA'}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\text{or } M \in (OM') \iff (\widehat{M'M, M'A'}) \equiv (\widehat{M'O, M'A'}) [\pi]$$

$(\widehat{M'O, M'A'}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ le triangle $OM'A'$ est rectangle en M' le point M' est un point du cercle C' de diamètre $[OA']$

$$\text{Ainsi } I(O, k)(\mathcal{D}) = \mathcal{C}[OA'] \setminus \{O\}$$



- Soit C un cercle de centre J passant par le point O

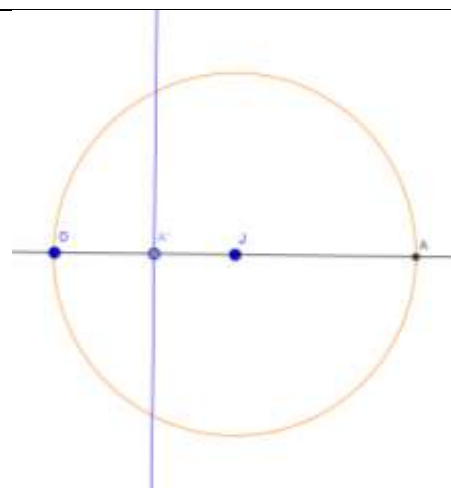
La droite (OJ) recoupe le cercle C en A.

Soit A' l'image de A par I(O,k)

Le point A' est un point de la droite (OJ)

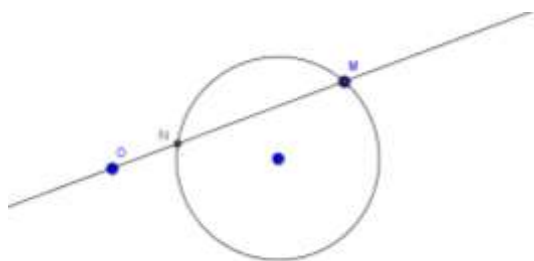
Soit $\mathcal{D}$ la perpendiculaire à (OJ) en A'

On a $I(O,k)(\mathcal{D}) = C \Leftrightarrow I(O,k)(C) = \mathcal{D}$



6)

- Soit C un cercle de centre J ne passant pas par le point O.



-
- Si la puissance p du point o par rapport au cercle C est égale k alors $I(o,k)(C) = C$
- Si la puissance p du point o par rapport au cercle C est différente de k

Soit M un point de C et N le deuxième point d'intersection de la droite (OM) et de C

$I(O,k)(M) = M' \Leftrightarrow M' \in (OM) \text{ et } \overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$

or $\overline{OM} \cdot \overline{ON} = p$ et $N \in (OM)$

Les points O M, M' et N sont donc alignés et on a $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$ et a $\overline{OM} \cdot \overline{ON} = p$

$$\text{donc } \frac{\overline{OM'}}{\overline{ON}} = \frac{k}{p} \Leftrightarrow \overline{OM'} = \pm \frac{k}{p} \overline{ON} \Leftrightarrow h\left(O, \pm \frac{k}{p}\right)(N) = M'$$

$$\text{soit } h\left(O, \pm \frac{k}{p}\right)(C) = C'$$

$$I(o,k)(C) = C' \Leftrightarrow h\left(O, \pm \frac{k}{p}\right)(C) = C'$$

7)

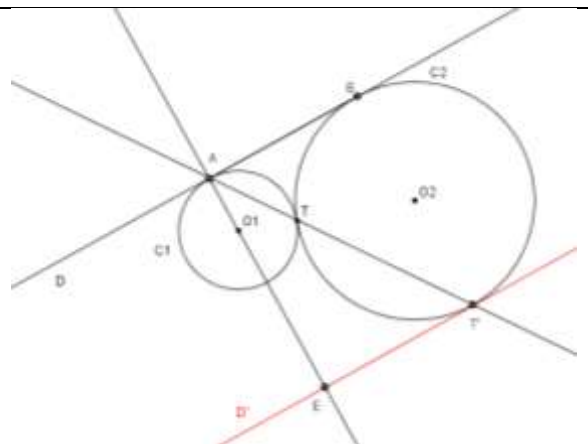
$$P_{A \setminus C_2} = AB^2 \Leftrightarrow f(C_2) = C_2$$

D passe par A donc $f(D) = D$

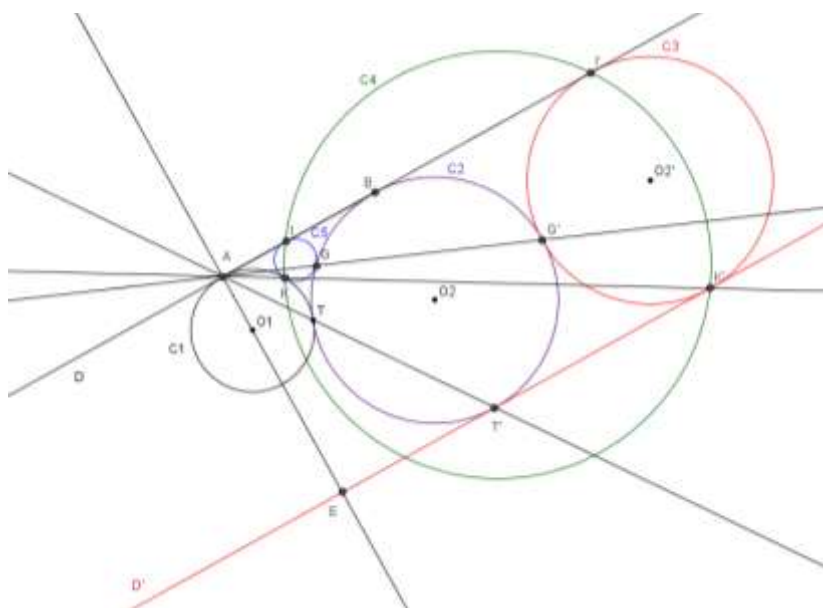
$T' = f(T)$ donc $T' \in (AT)$ or $T \in C_2$ donc T' est le point d'intersection de (AT) et de C_2 autre que T

Donc $T' = B$

C_1 passe par A son image par f est la droite D' perpendiculaire à la droite (AO_1) en T'



c)



Soit C_3 le cercle tangente à C_2 à la droite D' et à la droite D

On pose K' le point de contact de C_3 et la droite D' ; la droite (AK') recoupe C_1 en K

Donc $f(K) = K'$

On pose G' le point de contact de C_3 et le cercle C_2 ; la droite (AG') recoupe C_2 en G

Donc $f(G) = G'$

On pose I' le point de contact de C_3 et la droite D et $I' = f(I)$

On a $f(K) = K'$ et $f(I) = I'$ donc K, K', I et I' sont dans un même cercle C_4 , I' est donc le point d'intersection de (AI) et le cercle C_4

Le cercle C_5 passant par K', G' et I' est l'image de C_3 par f .



C_5 est tangente aux cercles C_1 et C_2 et à la droite D . Puisque son image C_3 par f est tangente aux droites D et D' et à C_2 .

Soit A la projeté orthogonal de O sur la droite D et A' son image par $I(O, k)$.

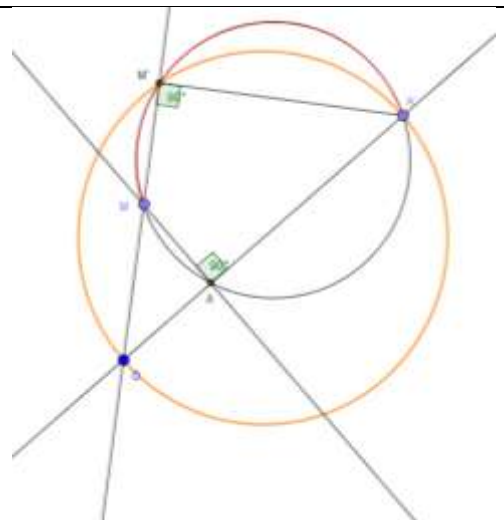
M un point de D et M' son image par $I(O, k)$.

Le point $O \notin D$ Les points A, A', M et M' sont sur un même cercle C donc

$$\left(\overrightarrow{M'M}, \overrightarrow{M'A'} \right) \equiv \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AA'} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\text{or } M \in (OM') \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{M'M}, \overrightarrow{M'A'} \right) \equiv \left(\overrightarrow{M'O}, \overrightarrow{M'A'} \right) [\pi]$$

$\left(\overrightarrow{M'O}, \overrightarrow{M'A'} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ le triangle $OM'A'$ est rectangle en M' le point M' est un point du cercle C' de diamètre $[OA']$



- Soit C un cercle de centre J passant par le point O

La droite (OJ) recoupe le cercle C en A .

Soit A' l'image de A par $I(O, k)$

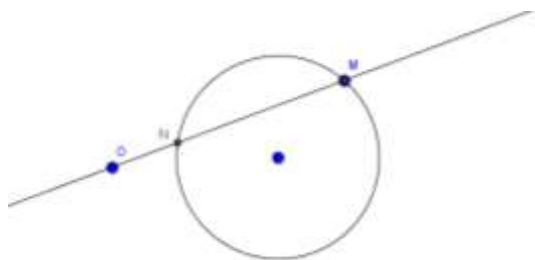
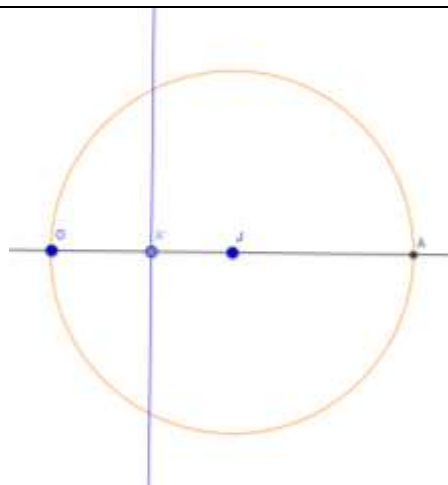
Le point A' est un point de la droite (OJ)

Soit D la perpendiculaire à (OJ) en A'

$$\text{On a } I(O, k)(A) = A' \Leftrightarrow I(O, k)(A') = A$$

$$\text{donc } I(O, k)(D) = C \Leftrightarrow I(O, k)(C) = D$$

- Soit C un cercle de centre J ne passant pas par le point O .



$$I(O, k)(M) = M' \Leftrightarrow M' \in (OM) \text{ et } \overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$$

$$\text{On a } N \in (OM) \text{ et } \overline{OM} \cdot \overline{ON} = p$$

Les points M, N, M' et N sont alignées et $\frac{\overline{OM'}}{\overline{ON}} = \frac{k}{p}$ donc



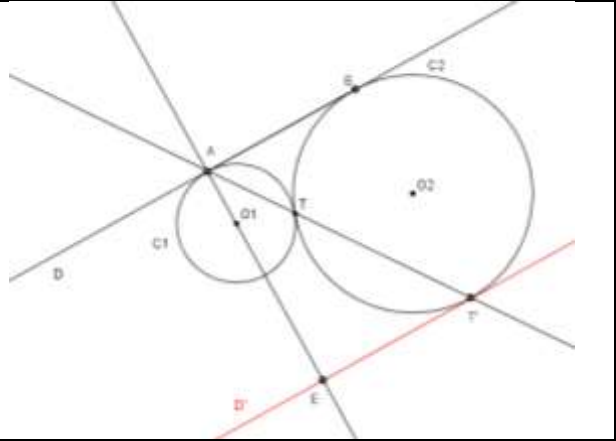
$$P_{A \setminus C2} = AB^2 \Leftrightarrow f(C2) = C2$$

D passe par A donc $f(D) = D$

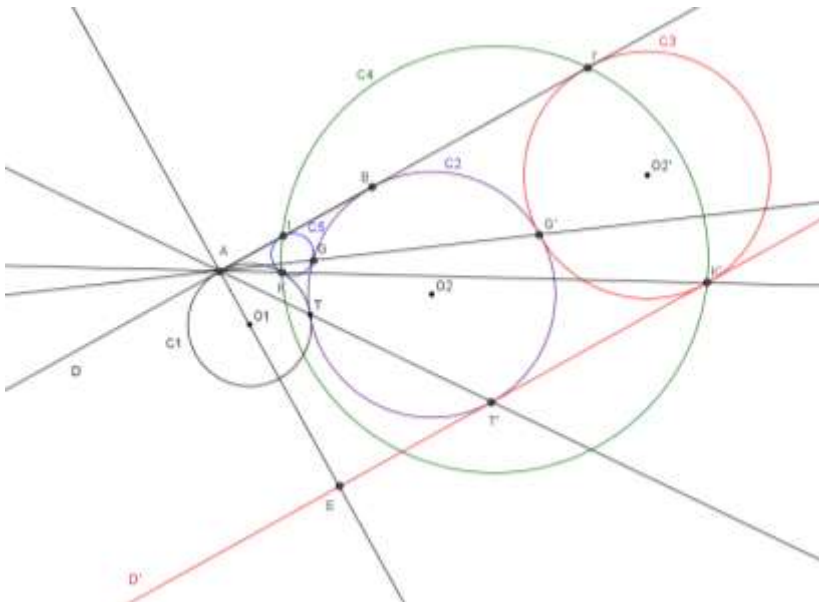
$T' = f(T)$ donc $T' \in (AT)$ or $T \in C2$ donc T' est le point d'intersection de (AT) et de $C2$ autre que T

Donc $T' = B$

$C1$ passe par A son image par f est la droite D' perpendiculaire à la droite $(AO1)$ en T'



c)



Soit $C3$ le cercle tangente à $C2$ à la droite D' et à la droite D

On pose K' le point de contact de $C3$ et la droite D' ; la droite (AK') recoupe $C1$ en K

Donc $f(K) = K'$

On pose G' le point de contact de $C3$ et le cercle $C2$; la droite (AG') recoupe $C2$ en G

Donc $f(G) = G'$

On pose I' le point de contact de $C3$ et la droite D et $I' = f(I)$

On a $f(K) = K'$ et $f(I) = I'$ donc K, K', I et I' sont dans un même cercle $C4$, I' est donc le point d'intersection de (AI) et le cercle $C4$

Le cercle $C5$ passant par K', G' et I' est l'image de $C3$ par f .

$C5$ est tangente aux cercles $C1$ et $C2$ et à la droite D Puisque son image $C3$ par f est tangente aux droites D et D' et à $C2$.

