

Exercice N°1

- 1) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(A, \vec{u}; \vec{v})$ on considère un quadrilatère convexe ABCD et on désigne par b, c et d les affixes respectives des points B, C et D.
 - a) Justifier que : $\left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right| + \left| \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right| \geq \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{d} \right|$
 - b) En déduire que : $AD \times BC + AB \times CD \geq AC \times BD$
- 2) Montrer que le quadrilatère ABCD est inscriptible si et seulement si

$$AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD$$

- 3) Soit MNPQ un parallélogramme. Un cercle passant par M recoupe les segments $[MN]$, $[MP]$ et $[MQ]$ respectivement en N' , P' et Q' .

$$MN \times MN' + MQ \times MQ' = MP \times MP'$$

Exercice N°2

Soit ABC un triangle et P un point à l'intérieur de ce triangle.

Les droites (PA), (PB) et (PC) coupent respectivement (BC), (AC) et (AB) en A' , B' et C'

On désigne par α, β et γ les aires respectives des triangles PBC, PAC et PAB.

- 1) a) Montrer que $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{A'B}{A'C}$
- b) En déduire que A' est le barycentre des points pondérés (B ;) et (C ; γ)
- c) Montrer que P est le barycentre des points pondérés (A ; α) (B ; β) et (C ; γ)
- 2) On pose $S = \frac{PA}{PA'} + \frac{PB}{PB'} + \frac{PC}{PC'}$
 - a) Exprimer S en fonction de α, β et γ .
 - b) Montrer que $S \geq 6$
 - c) Déterminer la position de P pour laquelle la somme S est minimal.

EXERCICE N°3

Soit f une fonction, définie, continue, deux fois dérivable sur un intervalle sur $[a; b]$ et telle que $f(a) = f(b) = 0$.

- 1) Soit $x_0 \in]a; b[$, on considère la fonction $\varphi: \rightarrow \varphi(x) = f(x) - A(x-a)(x-b)$ ou $A = \frac{f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}$

Calculer $\varphi(x_0)$, $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ et en déduire qu'il existe un réel $\alpha \in]a; b[$, tel que

$$f(x_0) = \frac{f''(\alpha)}{2}(x_0 - a)(x_0 - b)$$

- 2) Soit g une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle sur $[a; b]$ telle qu'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in [a; b]$ on ait $M \leq g''(x) \leq m$
 - a) Montrer que pour tout $x \in [a; b]$

$$M \frac{(x-a)(x-b)}{2} \leq g(x) - g'(a) \frac{x-a}{b-a} - g(b) \frac{x-b}{b-a} \leq m \frac{(x-a)(x-b)}{2}$$

$$b) \text{ En déduire la relation } -M \frac{(b-a)^3}{12} \leq \int_a^b g(x) dx - \frac{b-a}{2} (g(a) + g(b)) \leq -m \frac{(b-a)^3}{12} \quad (1)$$

- 3) En appliquant la relation (1) à la fonction $\ln$ sur l'intervalle sur $[n; n+1]$ ou $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Démontrer la relation } \frac{1}{12(n+1)^2} \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \leq \frac{1}{12n^2}$$

- 4) On pose pour tout entier naturel non nul n , $u_n = \ln\left(\frac{n^{\frac{n+1}{2}} e^{-n}}{n!}\right)$ et pour entier naturel $n \geq 2$

$$v_n = u_n + \frac{1}{12(n-1)}$$

a) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

b) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite l et que l'on a pour tout entier naturel ≥ 2 ,

$$l - \frac{1}{12(n-1)} < u_0 < l$$

5) On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et pour tout entier naturel non nul n ,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

b) Calculer I_1 et montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$ $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-1}$

c) En déduire les expressions de I_{2n} et I_{2n+1} en fonction de n

6)

a) montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^{4n} (n!)^4}{n((2n)!)^2} \right) = \pi$.

b) En déduire que $l = -\frac{\ln(2\pi)}{2}$.

EXERCICE N°1

$$\begin{aligned}
 1) \quad a) \quad \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{d} \right| &= \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} + \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right| \leq \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right| + \left| \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right| \\
 b) \quad \text{on a } \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{d} \right| &\leq \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right| + \left| \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{d-b}{db} \right| \leq \left| \frac{c-b}{cb} \right| + \left| \frac{d-c}{dc} \right| \\
 &\Leftrightarrow |c||d-b| \leq |d||c-b| + |b||d-c| \\
 &\Leftrightarrow AD \times BC + AB \times CD \geq AC \times BD
 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{d} \right|^2 &= \left| \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right) \right|^2 = \left[\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right) \right] \times \overline{\left[\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right) \right]} \\
 &= \left[\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right) \right] \times \overline{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)} + \overline{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right)} \\
 &= \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \times \overline{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)} + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \times \overline{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right)} + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right) \times \overline{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)} + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right) \times \overline{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right)} \\
 &= \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right|^2 + \left| \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right|^2 + \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right| \left| \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right| e^{i \arg \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) - i \arg \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right)} + \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right| \left| \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right| e^{i \arg \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right) - i \arg \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)} \\
 &= \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right|^2 + \left| \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right|^2 + \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right| \left| \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right| \left(e^{i \arg \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) - i \arg \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right)} + e^{i \arg \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right) - i \arg \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)} \right) \\
 &= \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right|^2 + \left| \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right|^2 + \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right| \left| \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right| \left(e^{i \arg \left(\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{c}}{\frac{1}{c} - \frac{1}{d}} \right)} + e^{-i \arg \left(\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{c}}{\frac{1}{c} - \frac{1}{d}} \right)} \right) \\
 &= \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right|^2 + \left| \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right|^2 + \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right| \left| \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right| \left(e^{i \arg \left(\frac{c-b}{d-c} \right)} + e^{-i \arg \left(\frac{c-b}{d-c} \right)} \right) \\
 &= \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right|^2 + \left| \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right|^2 + \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right| \left| \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right| \left(e^{i \arg \left(\frac{d(c-b)}{b(d-c)} \right)} + e^{-i \arg \left(\frac{d(c-b)}{b(d-c)} \right)} \right) \\
 &= \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right|^2 + \left| \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right|^2 + \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right| \left| \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right| (e^{i0} + e^{-i0}) \\
 &= \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right|^2 + \left| \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right|^2 + 2 \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right| \left| \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right| = \left(\left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right| + \left| \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right| \right)^2
 \end{aligned}$$

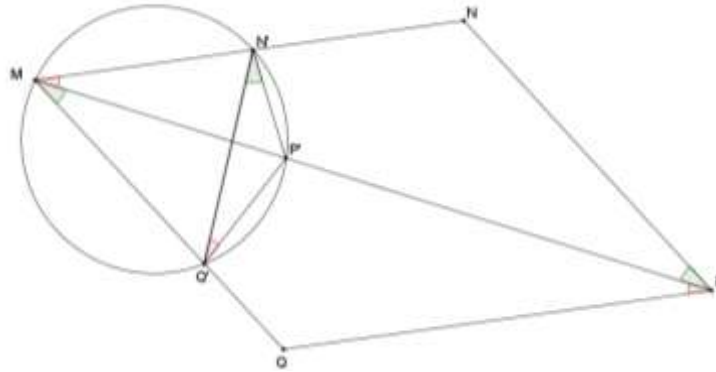
le quadrilatère ABCD est inscriptible si et seulement si

$$\begin{aligned}
 (\widehat{AB}; \widehat{AD}) &\equiv (\widehat{CB}; \widehat{CD}) \quad [\pi] \\
 \Leftrightarrow \arg \left(\frac{d}{b} \right) &\equiv \arg \left(\frac{b-c}{d-c} \right) \quad [\pi] \\
 \Leftrightarrow \arg \left(\frac{d}{b} \right) - \arg \left(\frac{b-c}{d-c} \right) &\equiv 0 \quad [\pi] \\
 \Leftrightarrow \arg \left(\frac{c}{b} \times \frac{d-c}{b-c} \right) &\equiv 0 \quad [\pi]
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{D'où } \left(\left|\frac{1}{b} - \frac{1}{d}\right|\right)^2 &= \left(\left|\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right| + \left|\frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right|\right)^2 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{b} - \frac{1}{d}\right| = \left|\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right| + \left|\frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right| \\
 &\Leftrightarrow \left|\frac{d-b}{db}\right| = \left|\frac{c-b}{cb}\right| + \left|\frac{d-c}{dc}\right| \\
 &\Leftrightarrow |c||d-b| = |d||c-b| + |b||d-c| \\
 &\Leftrightarrow AC \times BD = AD \times BC + AB \times DC
 \end{aligned}$$

3)



Les points M;N' ; P' et Q' sont cocycliques donc

$$(\widehat{MQ'}) \equiv (\widehat{N'Q'}) \quad [2\pi] \text{ et } (\widehat{MP'}) \equiv (\widehat{Q'P'}) \quad [2\pi]$$

MNPQ est parallélogramme (MN) // (PQ) et (MQ) // (NP) donc $(\widehat{MQ'}) \equiv (\widehat{PN'}) \quad [2\pi] \text{ et } (\widehat{MP'}) \equiv (\widehat{PQ'}) \quad [2\pi]$

Et par suite

$$(\widehat{PN'}) \equiv (\widehat{N'Q'}) \quad [2\pi] \text{ et } (\widehat{PQ'}) \equiv (\widehat{Q'N'}) \quad [2\pi]$$

Ainsi les triangles P'N'Q' et NMP sont semblables donc

$$\frac{P'N'}{NM} = \frac{P'Q'}{NP} = \frac{N'Q'}{MP} = k \neq 0$$

Donc $P'N' = kNM$; $P'Q' = kNP$ et $N'Q' = kMP$

Or MN'P'Q' est inscriptible donc

$$\begin{aligned}
 MP' \times N'Q' &= MQ' \times N'P' + MN' \times P'Q' \Leftrightarrow MP' \times kMP = MQ' \times kNM + MN' \times kNP \\
 &\Leftrightarrow k(MP' \times MP) = k(MQ' \times NM) + k(MN' \times NP) \\
 &\Leftrightarrow MP' \times MP = MQ' \times NM + MN' \times NP
 \end{aligned}$$

Exercice N° 2

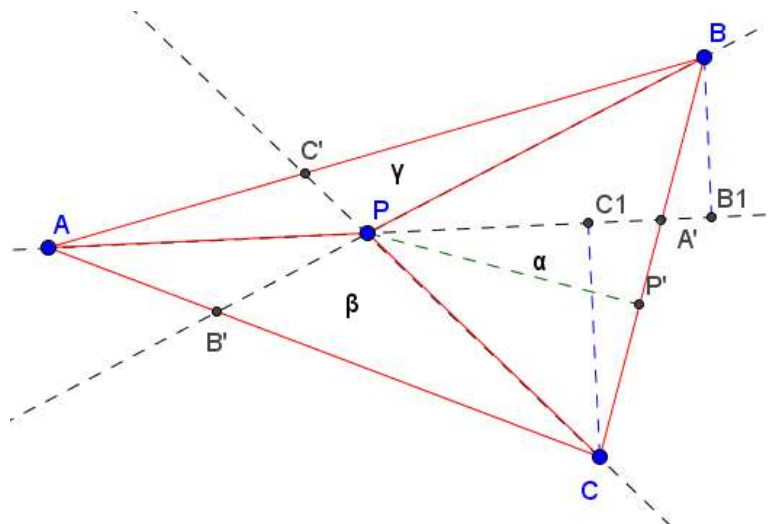
$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\text{air}(PAB)}{\text{air}(PAC)} = \frac{\frac{AP \times BB1}{2}}{\frac{AP \times CC1}{2}} = \frac{BB1}{CC1}$$

$$\frac{\text{air}(PBA')}{\text{air}(PCA')} = \frac{\frac{PA' \times BB1}{2}}{\frac{PA' \times CC1}{2}} = \frac{BB1}{CC1}$$

$$\frac{\text{air}(PBA')}{\text{air}(PCA')} = \frac{\frac{A'B \times PP'}{2}}{\frac{A'C \times PP'}{2}} = \frac{A'B}{A'C}$$

donc

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{BB1}{CC1} = \frac{A'B}{A'C}$$



$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{A'B}{A'C} \Leftrightarrow \gamma A'C = \beta A'B \text{ or } A' \in [BC] \text{ donc } \gamma \overrightarrow{A'C} = -\beta \overrightarrow{A'B} \Leftrightarrow \gamma \overrightarrow{A'C} + \beta \overrightarrow{A'B} = \vec{0} \text{ et comme } \beta + \gamma \neq 0$$

Et par suite le point A' est le barycentre des points pondérés (B, β) et (C, γ)



Montrons que P est le barycentre des points pondérés $(A; \alpha)$; (B, β) et (C, γ)

- On Montrer que P est le barycentre des points pondérés $(A; \alpha)$; $(A', \beta + \gamma)$

$$\frac{\text{air}(PAB)}{\text{air}(PA'B)} = \frac{PA}{PA'} = \frac{\text{air}(PAC)}{\text{air}(PA'C)}$$

$$\frac{\text{air}(PAB)}{\text{air}(PA'B)} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\text{air}(PAC)}{\text{air}(PA'C)} = \frac{\beta}{\alpha - \delta}$$

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\beta}{\alpha - \delta} \Leftrightarrow \gamma(\alpha - \delta) = \beta\delta \Leftrightarrow \alpha\gamma = \delta(\beta + \gamma) \Leftrightarrow \delta = \frac{\alpha\gamma}{\beta + \gamma}$$

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\frac{\alpha\gamma}{\beta + \gamma}} = \frac{\beta + \gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha PA = (\beta + \gamma)PA' \text{ or } P \in [AA']$$

$$\alpha \overrightarrow{PA} = -(\beta + \gamma) \overrightarrow{PA'} \Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{PA} + (\beta + \gamma) \overrightarrow{PA'} = \vec{0}$$

A' est le barycentre des points pondérés (B, β) et (C, γ) donc $\beta \overrightarrow{PB} + \gamma \overrightarrow{PC} = (\beta + \gamma) \overrightarrow{PA'}$

$\alpha \overrightarrow{PA} + (\beta + \gamma) \overrightarrow{PA'} = \vec{0}$ Devient $\alpha \overrightarrow{PA} + \beta \overrightarrow{PB} + \gamma \overrightarrow{PC} = \vec{0}$ et comme $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

Donc P est le barycentre des points pondérés $(A; \alpha)$; (B, β) et (C, γ) .

On pose

$$S = \frac{PA}{PA'} + \frac{PB}{PB'} + \frac{PC}{PC'} = \frac{\beta + \gamma}{\alpha} + \frac{\alpha + \gamma}{\beta} + \frac{\beta + \alpha}{\gamma}$$

$$S = \frac{\gamma\beta^2 + \beta\gamma^2 + \gamma\alpha^2 + \alpha\gamma^2 + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2}{\alpha\beta\gamma}$$

$$S = \frac{\alpha(\gamma^2 + \beta^2) + \beta(\gamma^2 + \alpha^2) + \gamma(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha\beta\gamma}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta \geq 2\alpha\beta$$

$$\alpha^2 + \gamma^2 = (\alpha - \gamma)^2 + 2\alpha\gamma \geq 2\alpha\gamma$$

$$\gamma^2 + \beta^2 = (\gamma - \beta)^2 + 2\gamma\beta \geq 2\gamma\beta$$

$$S = \frac{\alpha(\gamma^2 + \beta^2) + \beta(\gamma^2 + \alpha^2) + \gamma(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha\beta\gamma} \geq \frac{2\alpha\beta\gamma + 2\alpha\beta\gamma + 2\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma} \geq 6$$

$$S \text{ est minimal} \Leftrightarrow S = 6 \quad \alpha(\gamma^2 + \beta^2) + \beta(\gamma^2 + \alpha^2) + \gamma(\alpha^2 + \beta^2) = 6\alpha\beta\gamma$$

$$\alpha((\gamma - \beta)^2 + 2\gamma\beta) + \beta((\alpha - \gamma)^2 + 2\alpha\gamma) + \gamma((\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta) = 6\alpha\beta\gamma$$

$$\alpha(\gamma - \beta)^2 + \beta(\alpha - \gamma)^2 + \gamma(\alpha - \beta)^2 = 0$$

$$\begin{cases} \alpha(\gamma - \beta)^2 = 0 \\ \beta(\alpha - \gamma)^2 = 0 \\ \alpha(\gamma - \beta)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \beta \\ \alpha = \gamma \\ \gamma = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma$$

$$\alpha \overrightarrow{PA} + \beta \overrightarrow{PB} + \gamma \overrightarrow{PC} = \vec{0} \text{ devient } \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0} \quad P \text{ est le centre de gravité de triangle ABC.}$$

EXERCICE N°3

1)

$$\bullet \quad \varphi(x_0) = f(x_0) - A(x_0 - a)(x_0 - b) = f(x_0) - \frac{f(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)}(x_0 - a)(x_0 - b) = f(x_0) - f(x_0) = 0$$

$$\bullet \quad \varphi(a) = f(a) = 0$$

$$\bullet \quad \varphi(b) = f(b) = 0$$

- f est une fonction, définie, continue, deux fois dérivable sur un intervalle sur $[a; b]$ et $x_0 \in]a; b[$ donc φ est continue est dérivable sur $[a; x_0]$ et on a $\varphi(x_0) = \varphi(a) = 0$ il existe donc un réel $x_1 \in]a; x_0[$ tel que

$$\varphi'(x_1) = 0$$

- de même φ est continue est dérivable sur $[x_0; b]$ et on a $\varphi(x_0) = \varphi(b) = 0$ il existe donc un réel $x_2 \in]x_0; b[$ tel que $\varphi'(x_2) = 0$

- f est une fonction, définie, continue, deux fois dérivable sur un intervalle sur $[a; b]$ et on a

$a < x_1 < x_2 < b$ donc φ' est continue est dérivable sur $[x_1; x_2]$ et on a $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$ il existe donc un réel $\alpha \in]x_1; x_2[$ tel que $\varphi''(\alpha) = 0$

On a $\varphi(x) = f(x) - A(x-a)(x-b) \Rightarrow \varphi'(x) = f'(x) - A(x-b) - A(x-a)$

$$\Rightarrow \varphi''(x) = f''(x) - 2A$$

$$\text{Or } \varphi''(\alpha) = 0 \Rightarrow \varphi''(\alpha) = f''(\alpha) - 2A = 0 \Rightarrow A = \frac{f''(\alpha)}{2} = \frac{f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}$$

$$\Rightarrow f(x_0) = \frac{f''(\alpha)}{2}(x_0-a)(x_0-b)$$

- 2) Soit g une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle sur $[a; b]$ telle qu'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in [a; b]$ on ait $M \leq g''(x) \leq m$

b) Montrons que pour tout $x \in [a; b]$

$$M \frac{(x-a)(x-b)}{2} \leq g(x) - g(a) \frac{x-b}{a-b} - g(b) \frac{x-a}{b-a} \leq m \frac{(x-a)(x-b)}{2}$$

Soit $x \in [a; b]$ On pose $\psi(x) = g(x) - g(a) \frac{x-b}{a-b} - g(b) \frac{x-a}{b-a}$

ψ est deux fois dérivable sur l'intervalle sur $[a; b]$ vérifiant :

$$\psi(a) = g(a) - g(a) = 0$$

$$\psi(b) = g(b) - g(b) = 0$$

D'après la question 1

Pour tout $x \in]a; b[$ il existe un réel $\alpha \in]a; b[$ telle que $\psi(x) = \frac{\psi''(\alpha)}{2}(x-a)(x-b)$

$$\text{or } \psi'(x) = g'(x) - 2g(a) \Rightarrow \psi''(x) = g''(x)$$

On a pour tout $x \in [a; b]$ on ait $M \leq g''(x) \leq m$ donc $M \leq \psi''(\alpha) \leq m$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}M(x-a)(x-b) \leq \frac{\psi''(\alpha)}{2}(x-a)(x-b) \leq \frac{1}{2}m(x-a)(x-b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}M(x-a)(x-b) \leq \psi(x) \leq \frac{1}{2}m(x-a)(x-b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}M(x-a)(x-b) \leq g(x) - g(a) \frac{x-b}{a-b} - g(b) \frac{x-a}{b-a} \leq \frac{1}{2}m(x-a)(x-b)$$

La relation reste vraie pour $x=a$ ou $x=b$

Ainsi pour tout $x \in [a; b]$ on a

$$M \frac{(x-a)(x-b)}{2} \leq g(x) - g(a) \frac{x-b}{a-b} - g(b) \frac{x-a}{b-a} \leq m \frac{(x-a)(x-b)}{2}$$

$$\text{b) En déduire la relation } -M \frac{(b-a)^3}{12} \leq \int_a^b g(x)dx - g(a) \frac{b-a}{2} - g(b) \frac{(b-a)}{2} \leq -m \frac{(b-a)^3}{12} \quad (1)$$

on a

$$M \frac{(x-a)(x-b)}{2} \leq g(x) - g(a) \frac{x-b}{a-b} - g(b) \frac{x-a}{b-a} \leq m \frac{(x-a)(x-b)}{2}$$

donc

$$\begin{aligned} M \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2} dx &\leq \int_a^b g(x)dx - g(a) \int_a^b \frac{x-b}{a-b} dx - g(b) \int_a^b \frac{x-a}{b-a} dx \\ &\leq m \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2} dx \end{aligned}$$



- $\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2} dx = \frac{1}{2} \int_a^b (x^2 - (a+b)x + ab) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} (a+b)x^2 + abx \right]_a^b = -\frac{(b-a)^3}{12}$
- $\int_a^b \frac{x-b}{a-b} dx = -\frac{1}{2(a-b)} ((a-b)^2) = \frac{b-a}{2}$
- $\int_a^b \frac{x-a}{b-a} dx = \frac{1}{2(b-a)} ((b-a)^2) = \frac{b-a}{2}$

Donc

$$-M \frac{(b-a)^3}{12} \leq \int_a^b g(x) dx - g(a) \frac{b-a}{2} - g(b) \frac{b-a}{2} \leq -m \frac{(b-a)^3}{12}$$

$$\Leftrightarrow -M \frac{(b-a)^3}{12} \leq \int_a^b g(x) dx - \frac{b-a}{2} (g(a) + g(b)) \leq -m \frac{(b-a)^3}{12}$$

3) En appliquant la relation (1) à la fonction $\ln$ sur l'intervalle sur $[n; n+1]$ ou $n \in \mathbb{N}^*$

Démontrer la relation $\frac{1}{12(n+1)^2} \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \leq \frac{1}{12n^2}$

La fonction $\ln$ est deux fois dérivable sur $[n; n+1]$ et on a Pour tout x de $[n; n+1]$ $\ln''(x) = \frac{1}{x^2}$

$$n < x < n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{n^2} < -\frac{1}{x^2} < -\frac{1}{(n+1)^2}$$

D'après la relation (1)

$$\frac{1}{12(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \ln(x) dx - \frac{1}{2} (\ln(n) + \ln(n+1)) \leq \frac{1}{12n^2}$$

$$\frac{1}{12(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \ln(x) dx - \frac{1}{2} (\ln(n) + \ln(n+1)) \leq \frac{1}{12n^2}$$

$$\int_n^{n+1} \ln(x) dx = [x \ln(x) - x]_n^{n+1} = (n+1) \ln(n+1) - (n+1) - n \ln(n) + n$$

$$= (n+1) \ln(n+1) - n \ln(n) - 1$$

$$\int_n^{n+1} \ln(x) dx - \frac{1}{2} (\ln(n) + \ln(n+1)) = \frac{1}{2} (2(n+1) \ln(n+1) - 2n \ln(n) - 2 - \ln(n) - \ln(n+1))$$

$$= \frac{1}{2} ((2n+1) \ln(n+1) - (2n+1) \ln(n) - 2)$$

$$= \frac{(2n+1) \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{2} - 1 = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$$

d'où $\frac{1}{12(n+1)^2} \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \leq \frac{1}{12n^2}$

4) On pose pour tout entier naturel non nul n , $u_n = \ln\left(\frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!}\right)$ et pour entier naturel $n \geq 2$

$$v_n = u_n + \frac{1}{12(n-1)}$$

a) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

$$u_n - u_{n+1} = \ln\left(\frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!}\right) - \ln\left(\frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}} e^{-n-1}}{(n+1)!}\right) = \ln\left(\frac{\frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!}}{\frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}} e^{-n-1}}{(n+1)!}}\right) = \ln\left(\frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!} \times \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}} e^{-n-1}}\right)$$

$$= \ln \left(\frac{n^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}} e^{-n} e^{n+1} \times (n+1) \right)$$

$$= \ln \left(\frac{n^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}} e \right) = - \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + 1$$

$$u_{n+1} - u_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \geq \frac{1}{12(n+1)^2} > 0$$

Donc la suite (u_n) est croissante

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n-1)} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 - \frac{1}{12n(n-1)} \\ &\leq \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{12n(n-1)} = \frac{n-1}{12n^2(n-1)} - \frac{n}{12n^2(n-1)} = -\frac{1}{12n^2(n-1)} < 0 \end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est décroissante.

b) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite l et que l'on a pour tout entier naturel ≥ 2 ,

$$l - \frac{1}{12(n-1)} < u_n < l$$

On a pour tout entier naturel $n \geq 2$

$$v_n = u_n + \frac{1}{12(n+1)} \quad u_n \text{ est croissante et } (v_n) \text{ est décroissante} \Rightarrow \text{et } u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$$

La suite (u_n) est alors une suite croissante et majorée elle est donc convergente soit l sa limite

La suite (v_n) est alors une suite décroissante et minorée elle est donc convergente

$$\text{on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{12(n+1)} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \frac{1}{12(n+1)} = l$$

La suite (u_n) est converge vers l est elle est croissante $\Rightarrow l \leq u_n$

La suite (v_n) est converge vers l est elle est décroissante $\Rightarrow v_n \leq l \Rightarrow u_n + \frac{1}{12(n+1)} \leq l \Rightarrow u_n \leq l - \frac{1}{12(n+1)}$

D'où pour tout entier $n \geq 2$ on a $l \leq u_n \leq l - \frac{1}{12(n+1)}$

5) 5) On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et pour tout entier naturel non nul n ,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n (\sin x - 1) x dx \leq 0$$

Donc La suite (I_n) est décroissante

b) Calculer I_1 et montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$ $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-1}$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$$

On pose $u'(x) = \sin^n(x)$ et $v(x) = \sin^{n-1}(x)$ $u(x) = -\cos(x)$ $v'(x) = (n-1)\cos x \sin^{n-2}(x)$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = [-\cos(x) \sin^{n-1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2}(x) dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$$

Donc

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \Leftrightarrow I_n + (n-1)I_n = (n-1)I_{n-2} \Leftrightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

c) En déduire les expressions de I_{2n} et I_{2n+1} en fonction de n

$$* \quad \text{pour } n \geq 1 \quad I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2(n-1)}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0$$

$$I_4 = \frac{3}{4} I_2$$

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2(n-1)}$$

$$I_{2n} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n} I_0 = \frac{1 \times 3 \times 5 \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \dots \times 2n} I_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} I_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

$$d'où \quad I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

$$* \quad \text{pour } n \geq 1 \quad I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}$$

$$I_3 = \frac{2}{3} I_1$$

$$I_5 = \frac{4}{5} I_3$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{2n}{2n+1} I_1 = \frac{2 \times 4 \times 6 \dots \times 2n}{3 \times 5 \times 7 \dots \times (2n+1)} I_1 = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} I_1 = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$d'où \quad I_{2n+1} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

6)

$$a) \text{ montrer que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^{4n} (n!)^4}{n((2n)!)^2} \right) = \pi$$

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{\frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}}{\frac{(2n)! \pi}{2^{2n} (n!)^2 2}} = \frac{2^{2n} (n!)^2 \times 2^{2n} (n!)^2 \times 2}{(2n+1)! \times (2n)! \times \pi} = \frac{2^{4n+1} (n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^2 \pi} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2^{4n} (n!)^4}{n((2n)!)^2 \pi}$$

$$= \frac{1}{\pi \left(1 + \frac{1}{2n}\right)} \times \frac{2^{4n} (n!)^4}{n((2n)!)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi \left(1 + \frac{1}{2n}\right)} \times \frac{2^{4n} (n!)^4}{n((2n)!)^2} = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow +\infty} \times \frac{2^{4n} (n!)^4}{n((2n)!)^2} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{n((2n)!)^2} = \pi$$

b) En déduire que $l = -\frac{\ln(2\pi)}{2}$

$$2u_{2n} - 4u_n = \ln \left(\frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}}{(2n)!} \right)^2 - \ln \left(\frac{(n)^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!} \right)^4 = \ln \left(\frac{\frac{(2n)^{4n+1} e^{-4n}}{((2n)!)^2}}{\frac{n^{4n+2} e^{-4n}}{(n!)^4}} \right)$$

$$= \ln \left(\frac{2^{4n+1} n^{4n+1} e^{-4n}}{((2n)!)^2} \times \frac{(n!)^4}{n^{4n+2} e^{-4n}} \right)$$

$$= \ln \left(\frac{2^{4n+1} (n!)^4}{n((2n)!)^2} \right) = \ln \left(2 \frac{2^{4n} (n!)^4}{n((2n)!)^2} \right)$$

$$d'ou \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (2u_{2n} - 4u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(2 \frac{2^{4n} (n!)^4}{n((2n)!)^2} \right) \Leftrightarrow 2l - 4l = \ln(2\pi) \Leftrightarrow l = -\frac{\ln(2\pi)}{2}$$